Travaux Pratiques d'Optimisation Appliquée sur Excel

Réference : Y. Dodge. *Optimisation Appliquée.* Springer-Verlag France. 2005.

1 Une illustration simple : notre exemple favori

On considère le programme linéaire

$$\begin{array}{c} \text{Maximiser} \qquad z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.l.c.} \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{1}$$

Nous allons illustrer sur cet exemple comment utiliser le logiciel Excel pour
– Déterminer l'optimum,
– Calculer les prix duaux optimaux par calcul matriciel.

1.1 Déterminer l'optimum d'un programme linéaire

1.1.1 Spéfication des données

1. Ouvrir une feuille de calcul Excel.
2. Attribuer des noms de variables sur la deuxième ligne :

   on écrit les noms x_1 et x_2 en $A1$ et $B1$. On sélectionne le bloc $A1 : B2$. Dans le menu "INSERER", aller à "NOM", "CREER". La boîte de dialogue "Créer des noms" apparaît. On choisit "Ligne du haut" puis "OK". Toute donnée saisie en $A2$ (resp. $B2$) portera alors pour Excel le nom "$X1\_$" (resp. "$X2\_$") qu'on pourra utiliser comme nom de variable dans les formules.
3. Attribuer des noms pour la fonction économique et les contraintes sur la deuxième colonne :

   on écrit Z, $Cont1$ et $Cont2$ en $A4$, $A5$ et $A6$. On sélectionne le bloc $A4 : B6$. On suit le chemin "INSERER/NOM/CREER" comme précédemment mais dans la boîte "Créer des noms", on coche "Colonne de gauche".
4. Attribution des valeurs initiales :

   Saisir 0 en $A2$ donne la valeur 0 à la variable "$X1\_$". Faire de même pour $X2\_$.
   Saisir $= 4 * X1\_ + 3 * X2\_$ en $B4$ donne la valeur correspondante ($0 = 4*0+3*0$ ici) à la variable Z. De même, on saisit $= 2 * X1\_ + X2\_$ en $B5$ et $= X1\_ + 2 * X2\_$ en $B6$ pour spécifier les variables $C1$ et C_2.

1.1.2 Résolution à l'aide du Solveur d'Excel

1. Sélectionner la cellule contenant la fonction à maximiser, dans notre cas la cellule $B4$.
2. Suivre le chemin OUTILS/SOLVEUR. La boîte de dialogue "Paramètres du solveur" apparaît.
3. Entrer les données pour le solveur :

   "Cellule cible à définir" : $\$B\$4$. Cocher "Max". "Cellules variables" : sélectionner la plage de cellules A2 :B2. "$\$A\$2 : \$B\$2$" apparaît alors. Spécifier les contraintes une à une : cliquer sur "Ajouter" ; sélectionner B5, puis choisir $\leq$ et enfin 12. Idem pour l'autre contrainte. Pour la contrainte de positivité, on peut traiter toutes les variables en une seule fois en les selectionnant conjointement. Ce qui donne ici la contrainte "$A2 : B2 \geq 0$"

4. Spécifier les options du solveur :

   Cliquer sur "Options..." Choisir "Modèle supposé linéaire" et "Afficher le résultat des itérations" (ce qui donne le résultat des étapes intermédiaires de l'algorithme du simplexe). Puis "OK".
5. Cliquez sur "Résoudre" dans la boîte de dialogue "Paramètres du solveur"

A chaque itération de l'algorithme du simplexe, la boîte de dialogue "Affichage d'une solution intermédiaire" s'affiche. Les valeurs courantes des variables donnent le sommet intermédiare correspondant. Celles de Z, $C1$ et $C2$ donnent la fonction économique et précisent les contraintes serrées et dessérées.

Cliquer sur continuer pour passer à l'itération suivante. A la fin de l'algorithme (i.e. lorsque le solveur a trouvé l'optimum) la boîte de dialogue "Résultat du Solveur" apparaît. Choisir "Garder la solution du solveur", puis "OK".

1.2 Un peu de calcul matriciel et détermination des prix duaux optimaux

Excel permet un calcul matriciel élémentaire suffisant pour multiplier des matrices, les inverser, calculer des déterminants, etc... Ceci suffit pour calculer des prix duaux par la formule $\pi(I) = q^I(B^I)^{-1}$. Illustrons cela dans notre exemple. Dans ce qui suit, la colonne A sera consacrée à rendre plus lisible les calculs en spécifiant les nom des vecteurs et matrices.

1. Ouvrir une nouvelle feuille de calcul Excel (après avoir sauvegardé la feuille précédente...).
2. Le vecteur q^I : saisir qI dans la cellule A1. Les cellules B1 et C1 contiendront les valeurs des coordonnées de ce vecteur ligne : on saisit donc 4 dans B1 et 3 dans C1.
3. Sauter une ligne.
4. La matrice B^I : saisir BI dans A3. Puis 2 dans B3, 1 dans C3, 1 dans B4 et 2 dans C4.
5. Sauter une ligne.
6. La matrice $(B^I)^{-1}$: saisir INV dans A6. Puis =INVERSEMAT(B3 :C4) après avoir sélectionner le bloc de cellules "B6 :C7". Toute commande de ce genre doit être validée pour que Excel l'exécute. On valide en tapant CTRL + SHIFT + ENTREE.
7. Sauter une ligne.
8. Le produit $\pi(I) = q^I(B^I)^{-1}$: saisir PII dans A9. Sélectionner le bloc "B9 :B10" qui a la taille du produit désiré. Puis écrire = PRODUITMAT(B1 :C1 ;B6 :C7). Le vecteur obtenu est le vecteur de prix duaux.

2 Un exemple de production où un traitement informatique est nécessaire

L'exemple précédent est un cas d'école très simple : aucun besoin d'un programme informatique pour le résoudre. En revanche, dès que le nombre de variables et de contraintes devient un peu plus conséquent, exécuter les étapes de l'algorithme du simplexe est très fastidieux et l'outil informatique est d'un grand recours. Nous illustrons maintenant cela sur un exemple.

Une entreprise produit 4 biens en quantité x_1, x_2, x_3 et x_4. Les productions de ces biens font intervenir 3 ateliers. Dans le premier, les productions unitaires des 4 biens nécessitent respectivement 1, 2, 1 et 1 unités d'oeuvre (l'heure par exemple). Dans le second, 2, 3, 3 et 1 unités d'oeuvre. Et dans le troisième, 1, 4, 2, 1. Les capacités de production sont de 8, 18 et 16 unités d'oeuvre dans les premier, second et troisième ateliers respectivement. Les marges unitaires sont de 4 € , 7 € , 2 € et 1 € . On obtient donc le programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 \\ s.l.c. \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 18 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 16 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array} \right. & \end{array} \tag{2}$$

L'entreprise veut savoir quelle plan de production choisir pour maximiser sa marge. Dans un deuxième temps, elle voudrait faire évoluer sa stratégie de production en augmentant la capacité de production b_1 de l'atelier 1 et désire savoir jusqu'où une telle extension serait profitable (sachant que le prix d'usage d'une unité d'oeuvre supplémentaire de ce premier atelier est de $p_1 = 1$ €).

1. Calquer ce qui a été fait dans la section 1.1 pour résoudre le programme numériquement à l'aide d'Excel.
2. Quelle est la base optimale I ?
3. Utiliser Excel, comme dans la section 1.2, pour calculer les prix duaux optimaux $\pi(I)$.
4. On note $\hat{z}(b_1)$ la fonction donnant la marge optimale en fonction de la capacité b_1 du premier atelier. Quelle est la pente de cette fonction autour de $b_1^{(0)} = 8$? Vérifier le en résolvant (avec Excel) le programme pour $b_1 = 2$.
5. Déterminer le domaine de validité de I.
6. Jusqu'à quelle valeur b_1^* peut croire b_1 sans que la pente de $\hat{z}(b_1)$ ne change ? Résoudre (avec Excel toujours) le programme pour $b_1 = b_1^*$. Que dire de la solution de base $X(b^*, I)$ qui correspond à ce second membre ?Quelles sont toutes les nouvelles bases possibles ?
7. Résoudre le programme pour $b_1 = 14$. Quelle est la nouvelle base optimale J ?
8. Calculer les prix duaux $\pi(J)$? Cette base est-elle celle qui apparaît en $b_1 = b_1^*$?
9. Quel est le domaine de validité de J ?
10. En déduire la valeur minimale b_1^{**} pour laquelle J est optimale ? Résoudre le programme pour cette valeur.
11. Résoudre le programme pour $b_1 = 10$ et donner alors la base optimale K. Y a-t-il d'autres bases optimales que I, J et K ?
12. Quel est (à l'aide des seules données précédentes) le prix dual u_1 associé à la contrainte de production de l'atelier 1 pour la base K ?
13. Jusqu'où accroître la capacité de production b_1 pour que cette extension soit profitable ?

3 Quelques commentaires

Excel n'est bien entendu pas le seul logiciel disponible pour traiter des problèmes d'Optimisation Appliquée : on peut aussi utiliser STAN, LINDO, Mathematica, Matlab, Lotus, etc... Certains logiciels permettent un accès direct à des informations plus fines que celle données directement par Excel. Par exemple, LINDO donne toutes les informations sur l'analyse de sensibilité et la paramétrisation en fonction du second membre des contraintes.

4 Récréation

Si cela vous intéresse vous pouvez traiter le problème de minimisation de coût lors de la fabrication d'un alliage décrit dans l'exercice 1 de la feuille 3. Les ordinateurs sont en accès libre à certaines heures, profitez-en. Pour rendre les choses plus concrètes, voilà un exemple numérique de ce problème.

Une entreprise de sidérurgie produit un alliage comprenant du cuivre Cu, de l'aluminium Al et du fer Fe. Pour ce faire, elle dispose de 4 sortes de minerais provenant de mines différentes et dont la composition diffère. Ces minerais comportent, outre les 3 éléments Cu, Al et Fe, des impuretés (résidus carbonés C) qui brûlent lors de la fusion et engendrent une perte de masse. La teneur de l'alliage en chaque élément Cu, Al, Fe doit être comprise entre une valeur minimale et une valeur maximale pour garantir des propriétés chimiques de l'alliage (résistance, élasticité, conductivité, etc...). Ces contraintes sont données dans le tableau de composition suivant :

	Minerai 1	Min. 2	Min. 3	Min. 4	teneurs admissibles
Cu	$0,2$	$0,1$	0	$0,3$	$[0,05;0,2]$
Al	$0,1$	$0,2$	$0,4$	$0,1$	$[0,2;0,45]$
Fe	$0,4$	$0,1$	$0,3$	0	$[0,5;0,7]$
C	$0,3$	$0,6$	$0,3$	$0,6$	

Des contraintes de disponibilité des différents minerais sont également à prendre en compte. Le poids total d'alliage à produire est de 1000 tonnes. On cherche à minimiser le coût d'un chargement de four. Les prix des différents minerais sont de 7 € / tonne, 5 € /tonne, 10 € /tonne et 15 € /tonne. On est ainsi amené à résoudre le programme suivant

$$
\begin{array}{l}
\text{Minimiser} \quad c = 7x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \\
s.l.c.\left\{
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
 & & 0,7x_1 & + & 0,4x_2 & + & 0,7x_3 & + & 0,4x_4 & = & 1000 \\
50 & \leq & 0,2x_1 & + & 0,1x_2 & & & + & 0,3x_4 & \leq & 200 \\
200 & \leq & 0,1x_1 & + & 0,2x_2 & + & 0,4x_3 & + & 0,1x_4 & \leq & 450 \\
500 & \leq & 0,4x_1 & + & 0,1x_2 & + & 0,3x_3 & & & \leq & 700 \\
 & & 0 & \leq & x_1 & \leq & 650 & & & & \\
 & & 0 & \leq & x_2 & \leq & 800 & & & & \\
 & & 0 & \leq & x_3 & \leq & 400 & & & & \\
 & & 0 & \leq & x_4 & \leq & 200 & & & &
\end{array}
\right.
\end{array}
\tag{3}
$$