Licence Economie et Gestion — L1
Mme Chèze (UP A), M. Lion (UP B & C) — Mathématiques 2

EXERCICES DE TRAVAUX DIRIGÉS

A - Espaces (et sous-espaces) vectoriels

Exercice 1. Représenter graphiquement les ensembles suivants et indiquer, en justifiant votre réponse, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

1. $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$
2. $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$
3. $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
4. $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
5. $E_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$
6. $E_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$
7. $E_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$
8. $E_8 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
9. $E_9 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$
10. $E_{10} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$
11. $E_{11} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -2 \leq y \leq 2\}$
12. $E_{12} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\}$

Exercice 2. Indiquer, en justifiant votre réponse, quels ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

1. $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
2. $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\}$
3. $F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$
4. $F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1\}$
5. $F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \geq 0\}$
6. $F_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 - y^2) = 0\}$
7. $F_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
8. $F_8 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - x^2 - y^2 = 0\}$
9. $F_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$
10. $F_{10} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0\}$
11. $F_{11} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1;\ y = 2;\ z = 3\}$
12. $F_{12} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1\,;\ -1 \leq y \leq 1\,;\ -1 \leq z \leq 1\}$

Exercice 3. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel F.

1. Montrer que $E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Montrer que $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace vectoriel de F si, et seulement si, $E_1 \subseteq E_2$ ou $E_2 \subseteq E_1$.
3. Donner un exemple pour chacun des cas précédents.

Exercice 4. Lesquelles des familles de vecteurs suivantes forment-elles une famille libre de $\mathbb{R}^2$?

1. $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (-2, 2)$.
2. $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (-2, 3)$.
3. $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ et $v_3 = (1, 1)$.
4. $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$.
5. $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-1; -2)$ et $v_3 = (\frac{1}{2}, 1)$.
6. $v_1 = (3, -2)$.

Exercice 5. Pour quelles valeurs du paramètre m les vecteurs $u = (-1, 2)$ et $v = (1, m)$ forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^2$? Même question avec les vecteurs $u = (1, m + 3)$ et $v = (m, 4)$.

Exercice 6. Parmi les familles de vecteurs de l'exercice **??**, lesquelles forment une base de $\mathbb{R}^2$? Dans le cas où la famille de vecteurs n'est pas une base, on précisera la dimension du sous-espace-vectoriel engendré par la famille de vecteurs et on donnera une équation de ce sous-espace vectoriel.

Exercice 7. Pour quelles valeurs du paramètre m les vecteurs $u = (m, -1)$ et $v = (1, m + 2)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$? Décomposer le vecteur $w = (1, 0)$ dans cette base.

Exercice 8. Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 5y = 0\}$.

1. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner une base de D et préciser sa dimension.
3. Montrer que le vecteur $u = (-5, 2)$ appartient à D.

Exercice 9. Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\}$.

1. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner une base de D et préciser sa dimension.
3. Le vecteur $u = (0, 2)$ appartient-il à D ?

Exercice 10. Soient $v_1 = (6, 15)$, $v_2 = (2, 5)$ et $v_3 = (\frac{1}{2}, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On note D_1, D_2 et D_3 les droites vectorielles engendrées, respectivement par v_1, v_2 et v_3.

1. Montrer que $D_1 = D_2$.
2. Montrer que $D_1 \neq D_3$.
3. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ se décompose en la somme d'un vecteur de D_1 et d'un vecteur de D_3. La décomposition est-elle unique ?
4. Soit $u = (-1, 1)$. Montrer que $u \notin D_1$ et $u \notin D_3$. Décomposer u sur la base $\{v_1, v_3\}$ de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire déterminer a et b tels que $u = a\, v_1 + b\, v_3$.

Exercice 11. Montrer que les vecteurs $u_1 = (2,3,-1)$ et $u_2 = (1,-1,-2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ que les vecteurs $v_1 = (3,7,0)$ et $v_2 = (5,0,-7)$.

Exercice 12. Les vecteurs $u_1 = (1,0,-1)$ et $u_2 = (1,-1,0)$ engendrent-ils le même sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ que les vecteurs $v_1 = (5,-1,-4)$ et $v_2 = (1,1,-2)$?

Exercice 13. Les vecteurs $u_1 = (0,1,1)$ et $u_2 = (1,-1,0)$ engendrent-ils le même sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ que les vecteurs $v_1 = (1,-1,1)$ et $v_2 = (0,0,-2)$?

Exercice 14. Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.

1. Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Même question avec v_1 et v_3, puis v_2 et v_3.
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ? Si la réponse est non, on déterminera les réels a et b tels que $v_3 = a\, v_1 + b\, v_2$.

Exercice 15. Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,1,2)$.

1. Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Même question avec v_1 et v_3, puis v_2 et v_3.
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ? Si la réponse est non, on déterminera les réels a et b tels que $v_3 = a\, v_1 + b\, v_2$.

Exercice 16. Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?

1. $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,2,2)$ et $v_3 = (3,7,1)$.
2. $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,1,1)$.
3. $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (2,1,2)$, $v_3 = (1,0,1)$ et $v_4 = (0,1,0)$.
4. $v_1 = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ et $v_2 = (1,-3,2)$.
5. $v_1 = (1,-3,2)$ et $v_2 = (0,1,2)$.
6. $v_1 = (1,-1,-1)$, $v_2 = (0,2,2)$ et $v_3 = (3,7,1)$.
7. $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,2,2)$ et $v_3 = (5,10,15)$.
8. $v_1 = (1,-3,2)$, $v_2 = (0,1,2)$, $v_3 = (0,0,1)$ et $v_4 = (0,1,5)$.
9. $v_1 = (1,2,-6)$ et $v_2 = (0,0,1)$.
10. $v_1 = (1,-1,2)$, $v_2 = (5,-5,10)$ et $v_3 = (2,-2,4)$.

Exercice 17. On considère dans $\mathbb{R}^3$ une famille de 3 vecteurs linéairement indépendants $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\{e_1,\ 2e_2,\ e_3\}$.
2. $\{e_1,\ e_3\}$.
3. $\{e_1,\ 2e_1 + e_3,\ e_3\}$.
4. $\{3e_1 + e_3,\ e_3,\ e_2 + e_3\}$.
5. $\{2e_1 + e_2,\ e_1 - 3e_2,\ e_3,\ e_2 - e_1\}$.

Exercice 18. Quelles familles de vecteurs de l'exercice **??** forment une base de $\mathbb{R}^3$? Dans le cas où la famille de vecteurs n'est pas une base, on précisera la dimension du sous-espace-vectoriel engendré par la famille de vecteurs et on donnera une équation de ce sous-espace vectoriel.

Exercice 19. Montrer que les ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ dont on explicitera la dimension et une base :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } 2x - z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3z = 0\}$
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$
5. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 3x + 3y + 3z = 0\}$

Exercice 20. Soit $v_1 = (1, 0, -1)$ et $v_2 = (2, 1, 0)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Les vecteurs v_1 et v_2 forment-ils une famille libre ?
2. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel E engendré par ces vecteurs ?
3. Donner l'équation de E.

Exercice 21. Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, 0, 2)$ et $v_3 = (4, -2, 4)$.

1. Les vecteurs v_1, v_2 et v_3 forment-ils une famille libre ?
2. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel E engendré par ces vecteurs ?
3. Déterminer une base de E.
4. Donner une équation de E.

Exercice 22. Soient $v_1 = (1, 0, -1)$ et $v_2 = (3, 0, -3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Les vecteurs v_1 et v_2 forment-ils une famille libre ?
2. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel E engendré par ces vecteurs ?
3. Donner l'équation de E.

Exercice 23. Soit $E = \{(a - 2b, a + b, a) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de E.
3. Quelle est la dimension de E ?
4. Déterminer l'équation vérifiée par les vecteurs de E.

Exercice 24. On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par $v_1 = (1, a, a)$, $v_2 = (1, a, 1)$ et $v_3 = (4, a, 0)$. Déterminer selon les valeurs de a la dimension du sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_2 et v_3.

Exercice 25. Soit $u = (2, 0, 5)$. Écrire les équations de la droite vectorielle D engendrée par u. Soit $v = (1, 1, 1)$. Donner l'équation du plan vectoriel P engendré par u et v. Le vecteur $w = (5, 3, 8)$ appartient-il à D ? à P ?

Exercice 26. Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=0 \\ x+z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x-2y=2 \\ x+y+z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+3y-z=0 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 3x-y-2z=0 \\ x+y-z=-2 \\ x+2y+z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y-z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+3z=4 \\ x+4y+9z=16 \\ x+8y+27=64 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ x+4y+6z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+y=5 \\ -3x+z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+y=5 \\ -3x+z=-7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+y=5 \\ 3x+z=-7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 5x+5y+5z=4 \end{cases}$$

Exercice 27. Discuter et résoudre les systèmes suivants selon les valeurs des paramètres m, u, v, w, α, μ et λ :

$$\begin{cases} x+(m+1)y=m+2 \\ mx+(m+4)y=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx+(m-1)y=m+2 \\ (m+1)x-my=5m+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ x+y+\alpha z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=u \\ x-y=v \\ y+z=w \end{cases} \qquad \begin{cases} x+\alpha y+2z=3 \\ x+2\alpha y+2z=4 \\ x+2y+\alpha z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+3z=2 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+2y+\lambda z=\mu \end{cases}$$

B - Matrices

Exercice 28. Produits. Effectuer tous les produits possibles de deux des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 29. Distributivité mais pas commutativité.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comparer $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 30. Matrice témoin et calcul d'inverses.
Établir, si possible, l'inverse des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Exercice 31. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2\alpha & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre suivant les valeurs de α le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. En déduire les valeurs de α pour lesquelles la matrice A est inversible.

Exercice 32. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^3. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Retrouver ce résultat en calculant A^{-1} par la méthode de votre choix.

Exercice 33. Trois méthodes d'inversion. Soit le système linéaire $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice réelle A et le vecteur de composantes (α, β, γ) :

$$A\,X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

1. Exploiter la structure particulière de A pour résoudre directement $\mathcal{S}$. Déduire de la solution obtenue l'expression de la matrice inverse de A.
2. Établir l'expression de A^{-1} par l'algorithme de la matrice témoin.
3. Évaluer l'expression matricielle $A^3 - 2A^2$, et en déduire A^{-1} en fonction de A.

Exercice 34. On considère le système suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & u \\ x & - & y & & & = & v \\ & & y & + & z & = & w \end{array}\right. \quad , \quad (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$$

1. Ecrire le système sous forme matricielle $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$.
2. Résoudre le système (on exprimera les solutions en fonction de u, v et w).
3. Déterminer l'inverse de A.

Exercice 35. On considère le système linéaire $\mathcal{S}$ défini par

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & y & & & = & 6 \end{array}\right.$$

1. Résoudre $\mathcal{S}$ en utilisant l'algorithme de Gauss.
2. Écrire matriciellement ce système sous la forme $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$.
3. Calculer l'inverse de A.
4. Retrouver le résultat de la question 1 à l'aide de la question précédente.

Exercice 36. Inverse d'une matrice (2×2) Soit A la matrice réelle définie par $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Évaluer le produit $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et en déduire une condition pour que A soit inversible, ainsi que l'expression de A^{-1} (cette méthode sera étendue en $2^{\text{ème}}$ année à des matrices carrées quelconques).
2. On suppose ici que $ad - bc = 0$. Construire un vecteur $X \neq 0$ tel que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. En déduire que dans ce cas les vecteurs colonnes de A sont liés.

Exercice 37. Inversion par polynôme annulateur.

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 6A + 2I_2 = 0$. En déduire A^{-1}.

C - Produit scalaire, orthogonalité, projection orthogonale.

Exercice 38. Produit scalaire. Calculer le produit scalaire de tout couple de vecteurs choisis parmi

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix},\ X_4 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 39. Orthogonalité. Déterminer les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux :

1. au vecteur ${}^t(10, -3, 7)$.
2. conjointement à ${}^t(1, 2, 3)$ et ${}^t(0, 1, -1)$.
3. au plan d'équation $x + y - 6\,z = 0$.

Exercice 40. Base orthogonale. Soient a et b deux nombres réels.

1. Sous quelle(s) condition(s) sur a et b les vecteurs $U = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?
2. Déterminer alors tous les vecteurs $W \in \mathbb{R}^3$ orthogonaux simultanément à U et V. En déduire une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ comprenant les vecteurs U et V.

Exercice 41. Orthonormalisation.

Soit $E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) \subset \mathbb{R}^4$ où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E, puis que $E = \left\{{}^t(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = z\right\}$.
2. Calculer $\|\, v_1\|$.
3. On note $e_1 = v_1/\|\, v_1\|$ et $w_2 = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle\, e_1$. Calculer $\langle w_2, e_1\rangle$. En déduire un vecteur unitaire e_2 orthogonal à e_1.
4. Poursuivre ce procédé d'orthonormalisation (dit de Gram-Schmidt) pour construire une base orthonormée $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E.

Exercice 42. Projection orthogonale : existence, unicité, calcul direct. On garde ici les mêmes notations que dans l'exercice **??**. En particulier, $\{e_1, e_2, e_3\}$ désigne la base orthonormée trouvée précédemment.

1. Le vecteur $b = {}^t(2, 1, 0, 0)$ appartient-il à E ?
2. Montrer que si $u = u_1\, e_1 + u_2\, e_2 + u_3\, e_3 \in E$ est tel que $b - u$ est orthogonal à E alors $u_i = \langle b, e_i\rangle$. Et inversement ? Quelle est la projection orthogonale b' de b sur E ?
3. Écrire les équations normales associées à la matrice $A = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ dont les colonnes sont les vecteurs $v_i, i = 1, \ldots, 4$. Résoudre le système.
4. Si X désigne une des solutions trouvées au point (**??**), calculer $A\,X$. Pouvait-on anticiper ce résultat ?
5. Exprimer à l'aide de la matrice $B = [v_1, v_2, v_3]$ la matrice de la projection orthogonale sur E (dans la base canonique). Expliciter ce produit.

Exercice 43. Solution approchée. Moindres carrés. (Suite des deux exercices précédents...)

On considère le système
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Ce système admet-t-il une solution ?
2. Trouver la solution approchée de ce système au sens des moindres carrés.
3. Quel est le lien avec le système $A\,X = b'$?

Exercice 44. Projection orthogonale sur une droite.

Soient $X = {}^t(1, 1, 1)$ et $Y = {}^t(3, -6, 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer les longueurs de X et Y.
2. Déterminer le vecteur le plus proche de Y appartenant à la droite vectorielle $\mathbb{R}\,X$ portée par X, puis le vecteur proportionnel à Y le plus proche de X.
3. Déterminer le cosinus de l'angle formé par les vecteurs X et Y.
4. Soit P la matrice
$$P = \frac{X\,{}^tX}{{}^tX\,X} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$
Établir les principales propriétés de P et $I_3 - P$.
5. Calculer $P\,Y$ et $(I_3 - P)\,Y$ et leurs longueurs puis interpréter P et $I_3 - P$ (ou plutôt $\widehat{P}$ avec les notations de l'exercice **??**).
5. Que valent $(I_3 - P)\,(I_3 - \lambda\,P)$ et $(I_3 - \lambda\,P)^2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$? Quelle particularité présente le cas $\lambda = 2$?

Exercice 45. Droite de régression. Déterminer la droite la plus proche (au sens des moindres carrés) des nuages de points suivants :

1. les trois points de coordonnées $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(3, 12)$,
2. les quatre points $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(0, 2)$ et $(5, 3)$.

Exercices complémentaires

Exercice 46. Déterminer le vecteur V' du plan d'équation $x + y - z = 0$ le plus proche du vecteur $V = {}^t(2, 0, 1)$ et expliciter la matrice de projection éventuellement utilisée.

Exercice 47. Soient $v_1 = {}^t(1, 0, 0)$ et $v_2 = {}^t(1, 1, 0)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Construire la matrice de projection P sur le sous-espace E engendré par v_1 et v_2.
2. Calculer et représenter graphiquement la projection de $v_3 = {}^t(1, 1, 1)$ sur E.
3. Quelle est la projection orthogonale de v_3 sur le sous-espace $E^\perp$ orthogonal à E ?

Exercice 48. On considère le système d'équations dépendant d'un paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ défini par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Ce système admet-il une solution exacte ?
2. Quelle est, en fonction de μ, la solution au sens des moindres carrés ? Représenter-la graphiquement.
3. En déduire la projection orthogonale de ${}^t(1, \mu, 0)$ sur $\mathrm{Vect}\left({}^t(1, 2, 2), {}^t(0, -1, 1)\right)$.

Exercice 49. Isométries. Toute matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ détermine une application $\widehat{A} : X \in \mathbb{R}^p \mapsto A\,X \in \mathbb{R}^n$.

1. Si A est représentée par un tableau de colonnes $A = [C_1, \dots, C_p]$, vérifier que
$${}^tA\,A = \Big(\langle C_i, C_j\rangle\Big)_{i,j=1,\dots,p}.$$
Cette matrice s'appelle la matrice de Gram de $(C_1, \dots, C_p)$.
2. Montrer que la condition ${}^tA\,A = I_p$ signifie exactement que $\widehat{A}$ préserve le produit scalaire i.e.
$$\langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle\,.$$
3. Soient, dans $\mathbb{R}^2$, les deux vecteurs $R_1 = {}^t(\cos\theta, -\sin\theta)$ et $R_2 = {}^t(\sin\theta, \cos\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer $\|R_1\|$, $\|R_2\|$ et $\langle R_1, R_2\rangle$.
   (b) Soit $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs R_1 et R_2.
   Calculer ${}^tR\,R$. Représenter et identifier $\widehat{R}$.

Exercice 50. Une inverse pour Gram ? Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. On veut montrer ici que ${}^tA\,A$ est inversible ssi ($n \leq m$ et les colonnes $C_1, \ldots, C_n$ de A forment une famille libre).

On notera $C'_1 = (\langle C_1, C_j\rangle)_{j=1,\ldots n}, \ldots, C'_n = (\langle C_n, C_j\rangle)_{j=1,\ldots n}$ les colonnes de la matrice ${}^tA\,A$.

1. On suppose qu'il existe $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $C_1 = \sum_{i=2,\ldots,n} \lambda_i C_i$. En déduire une liaison des $(C'_i)_{i=1,\ldots,n}$.
2. Inversement, on suppose que $C'_1 = \sum_{i=2,\ldots,n} \lambda_i C'_i$. Écrire qu'alors, pour tout $j = 1, \ldots, n$,
$$\langle C_1, C_j\rangle = \sum_{i=2,\ldots,n} \lambda_i \langle C_i, C_j\rangle$$
et en déduire qu'alors $C_1 = \sum_{i=2,\ldots,n} \lambda_i C_i$.
3. Conclure.

Exercice 51. Matrice de projection orthogonale : une expression plus simple. Soit $n \leq m$ et $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ dont les colonnes $C_1, \ldots, C_n$ forment une famille libre. On rappelle que la matrice de projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_n)$ s'écrit alors
$$P = A\,({}^tA\,A)^{-1}\,{}^tA \in M_{m,m}(\mathbb{R}).$$
Soient $Q \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ matrice de colonnes orthonormées et $R \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ matrice inversible telles que $A = Q\,R$. Écrire P en fonction de Q (et R...).

Remarque : On pourrait montrer que deux telles matrices existent toujours sous les hypothèses énoncées sur A.

Exercice 52. Encore des moindres carrés. Déterminer les solutions au sens des moindres carrés des systèmes suivants :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{\begin{array}{ccccc} u & & & = & 0 \\ & & v & = & 2 \\ u & + & v & = & \lambda \end{array}\right. \qquad \mathcal{S}_2 = \left\{\begin{array}{ccccc} u & + & v & = & 3 \\ 2\,u & - & v & = & 0 \\ u & - & 2\,v & = & 0 \end{array}\right.$$

D - Formes quadratiques

Exercice 53. Soient les formes quadratiques définies pour $X \in \mathbb{R}^3$ puis $\mathbb{R}^4$ par

$$\begin{aligned} q_1(X) &= -x_1^2 - 3x_2^2 + 6x_3^2 - x_1x_2 + 4x_2x_3 \\ q_2(X) &= x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 6x_3x_4 \\ q_3(X) &= x_1x_2 + x_2x_3 - 3x_3x_4 + 2x_4x_1 \end{aligned}$$

Écrire la matrice symétrique A_i associée à chacune des formes q_i.

Exercice 54. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$q(x, y) = 2\,x^2 - 4\,x\,y + 5\,y^2.$$

1. Écrire la matrice A associée à la forme quadratique q, puis réduire q.
2. On pose $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer le produit matriciel ${}^tB \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} B$.
3. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Calculer $B\,X$ et ${}^tX{}^tB$. En déduire une autre réduction de q.

Exercice 55. Soient les formes quadratiques définies sur $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ par

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 + 3\,x_2^2 \\ q_2(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \\ q_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_1)^2 \end{aligned}$$

1. Que peut-on dire du rang des q_i ?
2. Réduire ces formes par l'algorithme de Gauss. Commenter.

Exercice 56. Pour chacune des formes quadratiques suivantes

$$\begin{aligned} q_1(X) &= x_1^2 + 4\,x_2^2 + x_3^2 - 4\,x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 - 4\,x_2\,x_3 \\ q_2(X) &= x_1^2 + x_2^2 + 3\,x_3^2 - 2\,x_1\,x_2 - 2\,x_1\,x_3 + 2\,x_2\,x_3 \\ q_3(X) &= x_1^2 - 4\,x_1\,x_2 - 2\,x_2\,x_3 + 2\,x_3\,x_1 \\ q_4(X) &= -x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + 4\,x_2\,x_3 - 2\,x_2^2 - 4\,x_3^2 \\ q_5(X) &= -3\,x_1^2 - 3\,x_2^2 - 5\,x_3^2 - 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_2\,x_3 + 2\,x_3\,x_1 \\ q_6(X) &= x_1^2 + 4\,x_2^2 - 6\,x_2\,x_3 \\ q_7(X) &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2\,x_1\,x_3 \\ q_8(X) &= x_1^2 - 4\,x_1\,x_2 + 2\,x_2\,x_3 + 4\,x_2^2 \\ q_9(X) &= 2\,x_1\,x_2 + 3\,x_1\,x_3 + 4\,x_2\,x_3 \\ q_{10}(X) &= 2\,(x_1\,x_2 + x_2\,x_3 + x_3\,x_1) \\ q_{11}(X) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4\,x_2\,x_3 + 4\,x_2\,x_4 + 4\,x_3\,x_4 \\ q_{12}(X) &= x_1\,x_2 + x_2\,x_3 + x_3\,x_4 + x_4\,x_1 \\ q_{13}(X) &= x_1\,x_2 + x_1\,x_3 + x_1\,x_4 + x_2\,x_3 + x_2\,x_4 + x_3\,x_4 \end{aligned}$$

1. Écrire la matrice symétrique A_i associée.
2. Réduire ces formes quadratiques et déterminer leurs signature et rang.

Exercice 57. Déterminer et étudier les formes quadratiques associées aux matrices suivantes (A asymétrique)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ -\alpha & 1-\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 58. Soit la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$q(X) = a\,x_1^2 + 2\,b\,x_1\,x_2 + c\,x_2^2$$

1. À quelles conditions nécessaires et suffisantes $q(X)$ est-elle définie positive ?
2. Que deviennent ces conditions pour avoir $q(X)$ définie négative ?
3. Étudier les formes $q_1(X) = 4\,x_1^2 + x_2^2$ et $q_2(X) = 4\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 + x_2^2$.

Exercice 59. Déterminer en fonction des éventuels paramètres les signature et rang des formes quadratiques suivantes :

1. $q_1(x,y) = (1-\lambda)x^2 + 2\,\mu\,x\,y + (1+\lambda)y^2$
2. $q_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2\,z(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$
3. $q_3(x,y,z,t) = x^2 + 3\,y^2 + 4\,z^2 + t^2 + 2\,x\,y + x\,t$
4. $q_4(x,y,z,t) = x\,y + a\,y\,z + b\,x\,t + y\,t$

Exercice 60. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit q_a la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q_a(x,\,y,\,z) = (1+a)\,x^2 + (1+a)\,y^2 + (2\,a^2 + a - 1)\,z^2 + 2\,(1-a)\,x\,y + 4\,a\,y\,z$$

1. Écrire la matrice associée à q_a.
2. Réduire q_a en fonction de a par la méthode de Gauss. En déduire sa signature et son rang.
3. On pose $a = -1$. Trouver des vecteurs $(x,\,y,\,z)$ pour lequels q est négative ou q est positive.
4. Montrer que l'ensemble des vecteurs qui annulent q est un sous-espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.

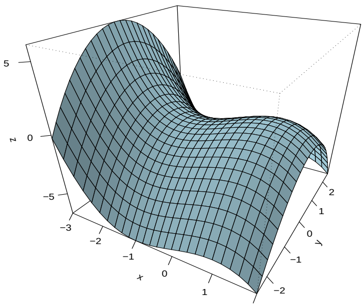
E - Fonctions de deux variables

Exercice 61. Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1(x,\, y) = x^2\, y^{-3}$
2. $f_2(x,\, y) = \sqrt{x\, y}$
3. $f_3(x,\, y) = \dfrac{\sqrt{y-x}}{\ln x}$
4. $f_4(x,\, y) = \sqrt{(x+2\,y)(y-2\,x^2)}$
5. $f_5(x,\, y) = \dfrac{\ln{(y-x+1)}}{\sqrt{4-x\,y}}$
6. $f_6(x,\, y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \sqrt{4-x^2-y^2}$

Exercice 62 (Lignes de niveau)**.** Soit le graphe de la fonction

$$f(x,\, y) = -\frac{x^3}{3} - y^2 + x$$



1. Donner (sans calculs) l'allure des lignes de niveau de la fonction.
2. Exprimer l'équation de la ligne de niveau z sous la forme $y^2 = g_z(x)$.
3. Étudier la fonction g_z.
4. Donner en fonction de x le nombre de solutions de $y^2 = g_z(x)$ quand $z = -1$, $z = 0$ et $z = 1$. Quel lien voyez vous avec la première question ?

Exercice 63. Représenter graphiquement les lignes de niveau des fonctions suivantes :

1. $f_1(x,\, y) = x^2\, y^{-3}$
2. $f_2(x,\, y) = \sqrt{x\, y}$
3. $f_3(x,\, y) = x + y$
4. $f_4(x,\, y) = (x+y)^2$
5. $f_5(x,\, y) = 4\,x^2 - y^2$
6. $f_6(x,\, y) = 10\,x^{1/3}\,y^{2/3}$

Exercice 64 (Points stationnaires)**.** Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes (en précisant leur domaine $\mathcal{D}$ de définition), puis déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{D}$ pour lesquels $\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,\, y) = \frac{\partial f}{\partial y}\,(x,\, y) = 0$

1. $f_1(x,\, y) = 4\,x^2 - y^2$
2. $f_2(x,\, y) = (x+y)^2$
3. $f_3(x,\, y) = x \ln y$
4. $f_4(x,\, y) = \sqrt{x^2+y^2}$
5. $f_5(x,\, y) = \exp{(1+x\,y^2)}$
6. $f_6(x,\, y) = 10\,x^{1/3}\,y^{2/3}$

Exercice 65. Écrire les développements limités d'ordre 2 en $(x_0,\, y_0)$ des fonctions suivantes :

1. $(x_0,\, y_0) = (0,\, 0)$ $\quad f_1(x,\, y) = 4\,x^2 - y^2$
2. $(x_0,\, y_0) = (0,\, 0)$ $\quad f_2(x,\, y) = (3 + x + y)^2$
3. $(x_0,\, y_0) = (1,\, 1)$ $\quad f_3(x,\, y) = x \ln y$
4. $(x_0,\, y_0) = (1,\, 1)$ $\quad f_4(x,\, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
5. $(x_0,\, y_0) = (0,\, 1)$ $\quad f_5(x,\, y) = \exp\,(1 + x\,y^2)$
6. $(x_0,\, y_0) = (1,\, 1)$ $\quad f_6(x,\, y) = \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}$

Exercice 66 (Approximation par un DL.)**.** On veut fabriquer des boîtes en carton de 1 m^3 dont la base est un rectangle de côtés x et y.

1. Calculer en fonction de x et y la hauteur que doit avoir la boîte.
2. En déduire que la surface de carton utilisée est donnée par la fonction
$$S(x,\, y) = 2\,x\,y + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$$
Quel est son domaine de définition ?
3. On fixe $x_0 = 2$ et $y_0 = 1$. Écrire le DL d'ordre 1 de S en $(x_0,\, y_0)$.
4. À l'aide de la question précédente, donner (sans calculatrice) une valeur approchée de la surface de carton utilisée quand le rectangle de base est $(x_0',\, y_0') = (1{,}95\,;\, 0{,}95)$, et comparer au résultat exact.
5. Soit maintenant une base de taille $(x_1 = 1,\, y_1 = 1)$. Établir de manière analogue une valeur approchée de la surface utilisée pour $(x_1',\, y_1') = (1{,}05\,;\, 0{,}90)$. L'ordre 1 est-il suffisant ?

Exercice 67. Préciser le signe des fonctions suivantes suivant les valeurs de $(x,\, y)$:

1. $f_1(x,\, y) = 2\,x\,y + x^2 + 6\,y^2$
2. $f_2(x,\, y) = 4\,x\,y - x^2 - 10\,y^2$
3. $f_3(x,\, y) = 4\,x^2 - 16\,x\,y + 16\,y^2$
4. $f_4(x,\, y) = 9\,x^2 - 6\,x\,y - 9\,y^2$

Exercice 68 (Points stationnaires)**.** Soit la fonction de l'exercice **??**. Déterminer ses points stationnaires, leur nature, puis les localiser sur le graphe.

Exercice 69. Déterminer les points stationnaires des fonctions suivantes et préciser leur nature

1. $f_1(x,\, y) = -x^2 - y^2 + x\,y + 3\,x$
2. $f_2(x,\, y) = 4\,x^3 - y^2 - 3\,x + 4\,y + 3$
3. $f_3(x,\, y) = -x^4 + x^2 + x\,y + x + y$
4. $f_4(x,\, y) = x^4 + y^4 + 6\,x^2\,y^2$
5. $f_5(x,\, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
6. $f_6(x,\, y) = \exp\,(x^2 - y^2)$
7. $f_7(x,\, y) = x\,(y^2 + 1) + \ln\,(x\,y)$

Exercice 70. [Juin 2000] On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivante :

$$f(x,y) = \ln(x^2\,y^2 - 1)$$

1. Déterminer et représenter graphiquement son domaine de définition.
2. Déterminer et représenter graphiquement la ligne de niveau de hauteur (altitude) $z = 0$.
3. Cette application admet-elle des points stationnaires ?

Exercice 71. [Juin 2000] Soit l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $f(x,y) = 2\,\ln(x) + \dfrac{1}{y} - 4\,x + x^2\,y$

1. Déterminer le domaine de définition de f (sans représentation graphique).
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
3. Vérifier que $(1,1)$ est un point stationnaire de f.
4. Écrire le développement limité d'ordre 2 de f au point $(1,1)$.
   Quelle est la nature de ce point stationnaire ?
5. Déterminer les autres points stationnaires de f et étudier leur nature.

Exercice 72. [Juin 2001] Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,\,y) = \sqrt{x+y}$

1. Déterminer son domaine de définition et le représenter graphiquement.
2. Déterminer l'équation de la ligne de niveau de hauteur 3 et la représenter graphiquement.
3. Montrer que f est homogène.
4. Calculer, pour $(x,\,y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$, la quantité

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Exercice 73. [Juin 2001] Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,\,y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y$

1. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(0,\,0)$.
2. Montrer que le point $(0,\,0)$ est un point stationnaire.
3. Quelle est la nature du point $(0,\,0)$?
4. Montrer que f a un autre point stationnaire dont on déterminera la nature.

Exercice 74. [Juin 2002] On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $f(x,\,y) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{y^2-1}}$

1. Déterminer et représenter graphiquement son domaine de définition.
2. Déterminer l'équation de la ligne de niveau de hauteur 1 et la représenter graphiquement.

Exercice 75. [Juin 2002] Soit l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $f(x,\,y) = x^4 + 2\,y^2 - 4\,x\,y$

1. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(0,\,0)$.
2. Vérifier que le point $(0,\,0)$ est un point stationnaire.
3. Quelle est la nature du point $(0,\,0)$?
4. Montrer que f a deux autres points stationnaires que l'on déterminera.