Feuille d'exercices n°4

4.1. Optimisation

Exercice 4.1. Soit la fonction $f(x) = 3x + \frac{27}{x} + 4$ définie pour $x \in \mathbb{R}^\star$.

1. Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s) de f.
2. Préciser la nature de chaque point stationnaire.

Exercice 4.2. Soit f la fonction réelle définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 6x^2 + 1$. Déterminer les extrema locaux éventuels de f en précisant leur nature.

Exercice 4.3. Soit f la fonction réelle définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^4 + 1} - x$.

1. Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s) de f.
2. Préciser la nature de chaque point stationnaire.
3. La fonction f est-elle convexe ? Si oui, que peut-on en déduire sur la nature de chaque point stationnaire ?

Exercice 4.4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s) de f.
2. Préciser la nature de chaque point stationnaire.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Que peut-on en déduire sur la nature de chaque point stationnaire ?

Exercice 4.5 (✍). Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les extremum éventuels en précisant leur nature :

1. $f(x) = x^2 + x + 1$
2. $f(x) = x^3 + 1$
3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$
4. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$
5. $f(x) = xe^x + 1$
6. $f(x) = x^3 \ln(x) - 1$
7. $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$

8. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x-1}$

4.2. Suites numériques

Exercice 4.6. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \frac{3n-1}{2n+12} \qquad v_n = (-1)^n \qquad w_n = 2n^2 - 1$$

Laquelle de ces suites est :
- majorée
- minorée
- bornée
- monotone (en précisant le sens de variation)

Exercice 4.7. Soit q un réel strictement positif. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_n = q\frac{n+1}{n} \text{ si } n \neq 0,$$

1. Montrer que la suite est bornée.
2. Etudier sa monotonie.

Exercice 4.8. Pour chacune des suites numériques suivantes, étudier leur monotonie, dire si elles sont majorées, minorées, bornées, convergentes, divergentes (on précisera le rang à partir duquel elles sont bien définies) :

$$u_n = \frac{6\,n+1}{3n+1},\ n\in\mathbb{N} \qquad u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}, n\in\mathbb{N}^\star \qquad u_n = \frac{3\,n+2}{4\,n-5},\ n\in\mathbb{N}$$

$$u_n = 2^n + n,\ n\in\mathbb{N} \qquad u_n = 2^{1+(-1)^n}, n\in\mathbb{N} \qquad u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n,\ n\in\mathbb{N}$$

$$u_n = n\,2^n,\ n\in\mathbb{N} \qquad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},\ n\in\mathbb{N} \qquad u_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n,\ n\in\mathbb{N}$$

Exercice 4.9 (✍). Pour chacune des suites numériques suivantes, étudier leur monotonie, dire si elles sont majorées, minorées, bornées, convergentes, divergentes (on précisera le rang à partir duquel elles sont bien définies) :

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2n^2+1},\ n\in\mathbb{N} \qquad u_n = n^2 - \cos(n),\ n\in\mathbb{N} \qquad u_n = (-1)^n 3^{-n},\ n\in\mathbb{N}$$

$$u_n = (-1)^n n,\ n\in\mathbb{N} \qquad u_n = n^{-2+(-1)^n},\ n\in\mathbb{N}^\star \qquad u_n = n^2 + 10^n,\ n\in\mathbb{N}$$

$$u_n = n^n,\ n\in\mathbb{N} \qquad u_n = 3n + (-1)^n,\ n\in\mathbb{N} \qquad u_n = \frac{2^n}{2^n+1},\ n\in\mathbb{N}^\star$$

$$u_n = e^{(-1)^n n},\ n\in\mathbb{N} \qquad u_n = \ln(n),\ n\geq 1 \qquad u_n = n!,\ n\in\mathbb{N}$$

Note : $n!$ se lit "factorielle n" et est égal au produit de tous les entiers non nuls inférieurs ou égaux à n, c'est-à-dire $n! = 1\times 2\times\cdots\times n$ si $n\geq 1$. Par convention, $0! = 1$.

Exercice 4.10. On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison u_0. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

1. Sachant que $r = 3$ et $u_4 = 25$, déterminer u_0 et u_7.
2. Sachant que $u_3 = 5$ et $S_4 = 15$, calculer r, u_0 et u_n en fonction de n.
3. Sachant que $r = -2$, $u_2 = -3$ et $S_n = -99$, calculer u_9 et n.

Exercice 4.11. On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

1. Sachant que $u_0 = 2$ et $q = -3$, calculer u_3 et S_3.
2. Sachant que $u_0 = 1$, $q = 2$ et $S_n = 15$. Calculer n.
3. Déterminer tous les réels q et u_0 possibles pour lesquels $u_1 = 4$ et $u_3 = 9$.

Exercice 4.12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_n = \frac{n}{4^n}$.

1. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer par récurrence : $u_n \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall n \geq 1$, .
4. Déterminer $\lim u_n$.
5. En déduire la limite de la suite numérique de terme général :

$$\frac{n+4^n}{2n+4^n},\ n \in \mathbb{N}$$

Exercice 4.13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_n = 2^n - n$.

1. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer par récurrence : $2^n \geq 2n$, $\forall n \geq 1$.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 4.14 (✍). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_n = n^2 - 9^n$.

1. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer par récurrence : $3^n \geq 3n$, $\forall n \geq 1$.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 4.15 (✍). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$u_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} \qquad u_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Montrer que $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et $(u_n-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique.
2. Calculer la somme des n premiers termes de u_n et v_n.

Exercice 4.16. Déterminer la limite de chacune des suites numériques suivantes (on précisera le rang à partir duquel elles sont bien définies) :

$$u_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^n} \qquad u_n = n^2 - e^n \qquad u_n = \frac{n+e^n}{6n+e^n} \qquad u_n = n - \sqrt{(n+1)(n+2)}$$

$$u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n+2}} - \frac{n+1}{\sqrt{n+3}} \qquad u_n = \frac{4n+(-1)^n}{3n-2(-1)^{n+1}} \qquad u_n = \frac{\ln(n+\ln(n))}{\ln(2n+\ln(n))}$$

$$u_n = \frac{(-1)^n+1}{2(-1)^n n+3} \qquad u_n = n\left(1+\frac{2}{n}\right)^3 \qquad u_n = n\exp\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$u_n = \frac{\sin\left(n^2\right)}{n} \qquad u_n = \frac{2n^3-n}{1+n-n^3} \qquad u_n = \frac{n\sin(n)}{n^2+1}$$

Exercice 4.17 (✍). Déterminer la limite de chacune des suites numériques suivantes (on précisera le rang à partir duquel elles sont bien définies) :

$$u_n = \sin(2\pi n) \qquad u_n = \frac{n + \cos(n)}{n - \sin(n)} \qquad u_n = \sqrt{n^3 + 5n^2} - \sqrt{n^3 + n}$$

$$u_n = n^2 - \sin(2^n) \qquad u_n = \ln(100^n) - n \qquad u_n = \sqrt{n} + \sqrt{n^3 + n}$$

$$u_n = -\sqrt{n} + \sqrt{n^3 + n} \qquad u_n = \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 + n} \qquad u_n = \frac{n^2 + \ln(2^n)}{n^{10} + e^{n+1}}$$

$$u_n = \ln(n) - n \qquad u_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^5 \qquad u_n = \sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + 1}$$

$$u_n = \frac{n}{n + \sin(n)} \qquad u_n = n^2 + \cos(n) \qquad u_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{n^2}$$