

TD4

TESTS

Exercice 1 Importance des risques

Considérons la situation à laquelle est confronté un contrôleur de trafic aérien à son poste ; si un petit point suspect apparaît sur l'écran, s'approchant du couloir de vol d'un gros jet, le contrôleur doit choisir entre:

H_0 : Tout va bien. Ce n'est qu'une légère interférence sur l'écran.

H_1 : Une collision avec un petit avion privé est imminente.

Remplir les blancs des affirmations suivantes:

Si H_0 est vraie, il peut se produire une «fausse alerte», ou erreur de ... espèce ; sa probabilité est notée

Si H_1 est vraie, il peut y avoir une « alerte omise », appelée erreur de ... espèce ; sa probabilité est notée

Quel est le risque le plus grave ? Quel est le risque contrôlé par le test ?

Le choix des hypothèses est-il judicieux ? Comment qualifieriez-vous l'attitude ayant présidé à ce choix ?

En rendant l'équipement plus, il est possible de réduire à la fois et

Exercice 2

La législation en vigueur impose aux aéroports certaines normes concernant les bruits émis par les avions au décollage et à l'atterrissage. Ainsi, pour les zones habitées proches d'un aéroport, la limite tolérée se situe à 80 décibels. A partir de cette limite, l'aéroport doit indemniser les riverains.

Les habitants d'un village voisin assurent que le bruit au dessus d'une certaine partie de leur village atteint la valeur limite de 80 décibels. L'aéroport affirme qu'il n'est que de 78 décibels. Afin de trancher entre les deux parties, on mesure l'intensité du bruit provoqué par le passage de 100 avions.

On admet que l'intensité du bruit causé par un avion suit une loi normale de moyenne m décibels et de variance 49 (décibels²). On admet aussi que les intensités du bruit causé par différents avions sont indépendantes entre elles.

A. On choisit $H_0 : m = 80$ comme hypothèse nulle et $H_1 : m = 78$ comme hypothèse alternative.

1- Quelle est l'interprétation des risques de première et de deuxième espèce ?

2- Déterminer la règle de décision pour un risque première espèce $\alpha = 0.05$. Que décide-t-on si le bruit moyen émis par les 100 avions est de 79.1 db ?

3- Calculer le risque de deuxième espèce. En déduire la puissance du test.

B. En prenant $H_0 : m = 78$ comme hypothèse nulle et $H_1 : m = 80$ comme hypothèse alternative, répondre aux questions 1, 2, 3 de A.

C. 1- Comparer les décisions prises en A et B. Que constatez-vous ?

Pour quel niveau de bruit chacun des 2 tests conduit-il à décider l'indemnisation ? Avec lequel indemnise-t-on plus souvent ? Quelle est son hypothèse privilégiée ?

2- En conservant l'hypothèse H_0 de la partie B, déterminer la valeur du seuil critique pour laquelle les risques de première et de deuxième espèce sont égaux. Quelle est la puissance de ce test ? Quelle décision prend-on ?

Mêmes questions en prenant pour hypothèse H_0 celle de la partie A. Comme en C.1, comparer les décisions prises dans les 2 cas. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 3

Au grand magasin MagiConso, au cours des 12 mois précédents, les ventes hebdomadaires du rayon parfumerie se distribuaient Normalement avec moyenne $m = 1,50$ et écart-type $\sigma = 0,40$ (unité : millier de dollars)

Désirant développer ce rayon, MagiConso a fait un effort important d'élargissement de sa gamme de produits.

L'objectif de la Direction est d'obtenir un accroissement des ventes de 20%, avec l'intention, s'il n'est pas atteint rapidement, de lancer une action publicitaire.

Laissant 15 jours aux ventes pour se stabiliser après la réorganisation, la Direction jugera ensuite, d'après les ventes des 4 semaines suivantes, si l'objectif est atteint: il s'agit de décider entre les 2 hypothèses suivantes :

H_0 : la moyenne des ventes hebdomadaires est toujours de 1,5

H_1 : la moyenne des ventes hebdomadaires est montée à 1,8

1. Énoncer la signification des 2 risques. Quel est le risque considéré comme le plus important par la Direction (celui qu'elle désire limiter)? Comment qualifieriez-vous cette attitude ?
 2. Les informations données permettent-elles de construire un test ? Énoncer l'hypothèse indispensable.
- A. En première approximation, on supposera que la *dispersion* des ventes hebdomadaires est restée la même (même si la moyenne a varié).
3. Quel paramètre cette supposition concerne-t-elle?
 4. Sachant que la Direction a fixé le risque de première espèce à 10%, déterminer la valeur critique K (valeur que doit atteindre la moyenne des ventes hebdomadaires sur les 4 semaines pour que l'objectif puisse être considéré comme atteint)
 5. Calculer le risque de seconde espèce β et la puissance η de ce test (énoncer sa signification).
Au vu des valeurs de α et β , la Direction pourrait souhaiter améliorer ce test : que faudrait-il faire ?
 6. Si la Direction décidait de doubler la période d'observation, quels seraient -pour le même risque α - la nouvelle valeur critique K' , le nouveau risque de seconde espèce β' et la puissance η' correspondante?
 7. Sur l'échantillon de 4 semaines, les ventes observées sont : 2,60, 1,76, 1,23 et 1,53 (milliers de dollars).
A quelle décision conduit le test? Que conseilleriez-vous à la Direction ?
- B. Dans une approche plus rigoureuse, on commencera par tester la supposition faite en A, pour répondre à la question :
- L'écart-type observé sur les ventes des 4 semaines étant $s \approx 0,51$,
la dispersion des ventes hebdomadaires est-elle inchangée ?
8. Tester au risque $\alpha = 10\%$
l'hypothèse H_0 : « l'écart-type des ventes hebdomadaires est toujours de 0,4 »
contre l'hypothèse H_1 : « l'écart-type des ventes hebdomadaires est supérieur à 0,4 »
 9. Quelle estimation de σ peut-on donner ?
 10. Compte tenu du résultat précédent refaire le test de moyenne (on devra remplacer l'ancienne valeur de σ par l'estimation obtenue grâce à l'échantillon).
- C. Sur 8 semaines d'observation, la moyenne des ventes est 1,70 et l'écart-type 0,43.
Comment referez-vous le test de moyenne ? Quelle en est la conclusion ?

Exercice 4

On applique le test "gauche-droite" à un échantillon de 25 enfants gauchers de sept ans et on obtient un résultat moyen de 10,8. On suppose que les résultats au test suivent dans la population des enfants gauchers de sept ans, une loi normale d'écart-type 3,4. Peut-on affirmer au risque 5% que le résultat moyen de la population est différent de 12?

Exercice 5

On soumet 160 étudiants choisis au hasard à une épreuve. On obtient un résultat moyen de 19,3 avec un écart-type de 5,8. Peut-on affirmer au risque 1%, que le résultat moyen de la population est inférieur à 20?

Exercice 6

Le Service Financier de la Société SURCOM avait étudié il y a 2 ans l'efficacité de ses procédures de recouvrement d'impayés et constaté que le nombre de factures non réglées -dans les 30 jours ouvrables suivant la date d'envoi- représente 10% des factures émises.

L'activité de la Société s'est accrue depuis, et le Responsable du service alerte son Directeur sur le fait que le taux d'impayés à 30 jours est -maintenant et depuis début 2007- de l'ordre de 15% : augmentation du nombre d'impayés à traiter alors que les effectifs du service n'ont pas changé.

Le Directeur Financier veut donc vérifier ce nouveau pourcentage, et demande une étude sur un échantillon de 400 factures à prendre parmi les quelques 5000 établies durant le 2 trimestre 2007 .

1- Définir la population concernée, la variable observée, sa nature.

2- Préciser les 2 hypothèses à départager, les deux risques d'erreur de décision ; Préciser l'hypothèse choisie comme hypothèse « nulle », en expliquant les raisons de ce choix.

Un risque $\alpha = 4\%$ vous semble-t-il acceptable?

3- Préciser la variable aléatoire à utiliser pour la construction d'un test départageant les deux hypothèses;

Quelle est sa loi sous H_0 ? Sa valeur critique K pour un risque $\alpha = 4\%$?

4- Énoncer clairement la règle de décision et déterminer la valeur du risque de 2^{de} espèce

5- La valeur de β étant jugée trop élevée, comment peut-on l'améliorer? (2 méthodes)

En conservant la valeur choisie initialement pour α , augmenter la taille de l'échantillon à 500 factures suffirait-il ? ... 600 factures? Quelle serait alors la puissance du test?

6- Quelle décision prendra le Directeur si l'échantillon observé montre un taux d'impayés de 12,5% sur 500 factures?

7- Déterminer pour p un intervalle de confiance correspondant au niveau de confiance 95%, puis 90% .

Exercice 7

Comme chaque année, le CIME (Collectif Intercommunal d'une vallée alpine) surveille régulièrement les taux de réservation pour les 5 semaines d'intersaison (5 Janvier au 9 Février, hors vacances scolaires).

Un mois avant le début de la période, le taux de réservation est en général au moins égal à 70%.

Si ce taux n'est pas atteint cette année, il faudra lancer une campagne promotionnelle sur les ondes.

Les réservations sur quelques hôtels et résidences significatifs servent d'indicateur fiable (taille de l'échantillon : $n = 600$ nuitées).

1- Quels sont les deux risques d'erreur de décision ? Quel est le plus grave à votre avis ?

2- En attendant de connaître la valeur du nouveau taux, vous construisez le test suivant :

T_1 : $H_0 : p = 0,7$ contre $H_1 : p > 0,7$

Quel risque allez-vous contrôler ? Le seuil critique K sera-t-il supérieur ou inférieur à $0,7 = 70\%$?

Quelle variable aléatoire (statistique de test) utilisez-vous pour construire le test et déterminer K ?

Précisez sa loi sous H_0 , en indiquant le théorème utilisé et ses conditions d'application.

Définissez et représentez graphiquement la région critique (cas de rejet de H_0).

Calculez la valeur critique K pour un risque $\alpha = 5\%$ et rédigez la règle de décision.

3- Le président du Collectif vient de recevoir le dernier effectif de réservations pour la période:

sur l'échantillon de 600 nuitées, 432 sont réservées à ce jour .

Il vous demande si le taux est significativement supérieur à 70% . Quelle est votre réponse ?

Quelle décision en découle ?

4- Avec le test T_2 : $H_0 : p = 0,7$ contre $H_1 : p < 0,7$ quel risque auriez-vous contrôlé ?

Quel aurait été le seuil K' (pour $\alpha = 5\%$)? (répondre par analogie, sans refaire toute la construction)

Pour quelles valeurs du taux observé la campagne promotionnelle aurait-elle été décidée ?

Comparez avec le test T_1 : les cas en sont-ils plus ou moins nombreux avec T_2 ?