

Dérivée seconde et développements limités

3.1. Dérivée seconde

Exercice 3.1. Calculer la dérivée seconde des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 3x^4 - 2x^2 + 8x$.
2. $x \mapsto 2\sqrt{x} + \ln(x)$.
3. $x \mapsto \sin(3x)$.
4. $x \mapsto \frac{3x+1}{2-x}$.
5. $x \mapsto x \ln(x) - x$.
6. $x \mapsto 3x \exp(x)$.
7. $x \mapsto \ln(\ln(x))$.

Exercice 3.2 (\triangle). Calculer les dérivées secondes des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^x + e^{-x}$ (réponse : $e^x + e^{-x}$).
2. $x \exp(-x)$ (réponse : $(x-2) \exp(-x)$)
3. $x \mapsto x + \ln(x) + \frac{1}{x}$ (réponse : $\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$).
4. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (réponse : $-\frac{1}{\cos^2(x)}$)
5. $x \mapsto x^x$ (réponse : $x^x (\frac{1}{x} + (\ln(x) + 1)^2)$).

3.2. Développements limités

Exercice 3.3. Déterminer le développement limité en x_0 à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto (1+x)^4, x_0 = 0$.
2. $x \mapsto \ln(1-2x), x_0 = 0$.
3. $x \mapsto \exp(x) + \exp(-x), x_0 = 0$.

4. $x \mapsto \cos(x) \ln(1+x)$, $x_0 = 0$.
5. $x \mapsto \sqrt{\exp(x)}$, $x_0 = 0$.
6. $x \mapsto \exp(x)$, $x_0 = 1$.
7. $x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$, $x_0 = e$.

Exercice 3.4 (\triangleleft). Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln^2(1+x)$
2. $x \mapsto \exp(\sin(x))$.
3. $x \mapsto \frac{e^x - 1}{1+x}$
4. $x \mapsto \sin(\sin(x))$

3.3. Application des développements limités

Exercice 3.5. Déterminer l'équation de la tangente en x_0 au graphe de f et la position du graphe de f par rapport à cette tangente pour les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 2x^2 - x + 1$, $x_0 = 1$.
2. $x \mapsto x + \cos(2x)$, $x_0 = 0$.
3. $x \mapsto (1+x)^3 \exp(x)$, $x_0 = 0$.
4. $x \mapsto \frac{x+1}{3x-1}$, $x_0 = 1$.

Exercice 3.6. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1 - \ln(1+x)}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.
5. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{(x-e)^2}$.