Feuille d'exercices n°2

2.1. Dérivée

Exercice 2.1. En utilisant la définition, calculer la dérivée de $f(x) = x^2 - 4x + 5$ au point $x_0 = 2$.

Exercice 2.2. Calculer la dérivée première des fonctions suivantes :

$$x \mapsto 3x^4 - 2x^2 + 8x, \qquad x \mapsto \frac{3x+1}{2-x}, \qquad x \mapsto \frac{3\ln(x)+1}{2-e^x}, \qquad x \mapsto \ln(\cos(x)),$$

$$x \mapsto \sin(3x), \qquad x \mapsto \cos(3/x), \qquad x \mapsto \tan(2\sqrt{x}), \qquad x \mapsto (x-2)^{1/3}, \qquad x \mapsto \frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}$$

$$x \mapsto e^{\sqrt{\frac{3x+1}{2-x}}}, \qquad x \mapsto \sin(x)e^{\frac{1}{\ln(2x)}}, \qquad x \mapsto \ln(\ln(x)), \qquad x \mapsto x^x.$$

Exercice 2.3. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

- $f(x) = e^x - x \qquad$ si $x < 0$,
- $f(x) = \cos^2(\pi x) \qquad$ si $x \in [0, 1]$,
- $f(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x} \qquad$ si $x > 1$.

Exercice 2.4. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x}, \qquad \text{si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[-1, 1]$.

2. Montrer que $f^{'}$ est continue sur $]-1,1[$.

Exercice 2.5. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$:

- $f : x \mapsto \sin(1/x)$.
- $f : x \mapsto x\sin(1/x)$.
- $f : x \mapsto x^2\cos(1/x)$.

Exercice 2.6. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$$x \mapsto x|x|, \qquad x \mapsto \frac{1}{1+|x|}.$$

Exercice 2.7 (✍). 1. Déterminer tous les couples de réels (a,b) tels que la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} ax^2 - x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit continue en 1 ; dérivable en 1.

2. On pose ici : $a = 1$ et $b = -1$. Calculer, si elle existe, la valeur de $\lim\limits_{x \to 1} g'(x)$, puis tracer l'allure de la courbe représentative de g.
3. La fonction g est-elle dérivable en 1 ? Pourquoi ?
4. Comment se manifeste graphiquement le résultat obtenu pour la valeur de $\lim\limits_{x \to 1} g'(x)$?

Exercice 2.8 (✍). Démontrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire et la dérivée d'une fonction impaire est paire. Expliquer le sens géométrique de ce fait.

2.2. Equation de la tangente

Exercice 2.9. Déterminer l'équation de la tangente pour chacune des fonctions suivantes, au point indiqué :

1. $x \mapsto 2x^2 - x + 1$ au point $(0,1)$,
2. $x \mapsto 2x + 1$ au point $(1,3)$,
3. $x \mapsto \sin(2x)$ au point $(0,0)$,
4. $x \mapsto \ln(\tan(x))$ au point $(\frac{\pi}{4}, 0)$,
5. $x \mapsto \dfrac{x+1}{3x-1}$ au point $(1,1)$.

2.3. Monotonie

Exercice 2.10. En utilisant la dérivée, étudier la monotonie de chacune des fonctions suivantes :

$x \mapsto x^{2005}, \qquad x \mapsto \dfrac{1}{x}, \qquad x \mapsto \cos(2x), \qquad x \mapsto \sin(3x),$

$x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{x-1}, \qquad x \mapsto xe^x - e^x + 1, \qquad x \mapsto x + 2x\ln(x), \qquad x \mapsto e^{2x},$

$x \mapsto \ln(3x), \qquad x \mapsto \dfrac{e^x}{x}, \qquad x \mapsto 2\sqrt{x}.$

2.4. Théorème de Rolle

Exercice 2.11.

1. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = (x^2+1)\sin(x)$.
2. Montrer que l'équation $(x^2+1)\cos(x) + 2x\sin(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$.