Feuille d'exercices n°1

0. Équations et inéquations

Exercice 0.1. Résoudre les équations suivantes :

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad x^4 + x^2 - 6 = 0 \qquad x^3 + x = x^4 + x^2$$

Exercice 0.2. Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{x+1}{x+3} > 0 \qquad \frac{x^2-1}{x^2+x-6} > 0 \qquad x^3 - 2x^2 - x + 2 < 0 \qquad (x+3)^2 \leq 4 \qquad (x-3)^3 \geq 1$$

Note : on écrira les solutions sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

Exercice 0.3. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid 9x^2 \leq 1\} \quad F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 4\} \quad G = \{x \in \mathbb{R} \mid -8x^2 + 6x - 1 > 0\}$$

Écrire sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles : $\mathbb{R} \setminus F$, $E \cup F$, $E \cap G$, $E \cup G$.

1. Généralités sur les fonctions numériques réelles

Exercice 1.1. Soient f et g les fonctions numériques réelles données par les expressions :

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Quels sont les domaines de définition de $f+g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$?

Exercice 1.2. Déterminer les domaines de définition des fonctions numériques réelles suivantes :

$$x \mapsto \sqrt{-x} \qquad x \mapsto \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}} \qquad x \mapsto \ln(1-2x^2) \qquad x \mapsto \frac{x+1}{x^3-2x}$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2-1} \qquad x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \qquad x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Exercice 1.3. Étudier la parité des fonctions numériques réelles suivantes :

$$x \mapsto 2x^2+1 \qquad x \mapsto \ln(1-2x^2) \qquad x \mapsto \frac{|\, x \,|+1}{3\,|\, x \,|+2} \qquad x \mapsto \frac{1}{x^3}$$
$$x \mapsto \sqrt{x^2-1} \qquad x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \qquad x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

Exercice 1.4. Soient les fonctions $f : x \mapsto 3x+1$ et $g : x \mapsto x^2-1$. Déterminer les applications $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$.

Exercice 1.5 (✍). Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{x-1} \qquad x \mapsto \sqrt{x}+\frac{1}{x-1} \qquad x \mapsto \frac{2x-3}{3x+2}$$
$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+\ln(x)}} \qquad x \mapsto \sqrt{\ln(x)-1} \qquad x \mapsto \sqrt{x^2-x-2}$$

Exercice 1.6 (✍). Étudier la parité des fonctions numériques réelles suivantes :

$$x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \qquad x \mapsto \sin\left(x^2\right) \qquad x \mapsto \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)} \qquad x \mapsto \sin(x)\cos(x)$$

2. Limites et continuité

Exercice 2.1. Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$$

$$\text{c)} \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}} \qquad \text{d)} \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1} \qquad \text{e)} \quad \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$$

$$\text{f)} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} \qquad \text{g)} \quad \lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)$$

$$\text{h)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x} \qquad \text{i)} \quad \lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$$

$$\text{j)} \quad \lim_{x\to+\infty} (x\ln x - x\ln(x+2)) \qquad \text{k)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$$

$$\text{l)} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}} \qquad \text{m)} \quad \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+3x+2}+x)$$

$$\text{n)} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x} \qquad \text{o)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$$

Exercice 2.2.

1. Montrer que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$.
2. Montrer que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2.3. Étudier les asymptotes de chacune des fonctions suivantes :

$$x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}, \qquad x \mapsto \frac{x}{x^2+1}, \qquad x \mapsto 1+\sqrt{x^2-x-1},$$

$$x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x-1}, \qquad x \mapsto 2x+\ln(1+x), \qquad x \mapsto \frac{2x-1}{3x+5}.$$

Exercice 2.4. Montrer que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^*$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$ et dire si l'on peut les prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$
2. $g(x) = \dfrac{(1+x)^3-1}{x}$
3. $h(x) = \sin(x)\sin(\dfrac{1}{x})$
4. $k(x) = \dfrac{|\sin(x)|}{x}$

Exercice 2.5. Montrer que l'équation $x^7-3x^2+4x-1=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1,1[$. Même question pour l'équation $x^{29}+14x^{17}-7x^5+2=0$.

Exercice 2.6 (✍). Montrer que :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2} = \dfrac{1}{2}$
2. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln(x)} = -\infty$
3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x^2+3}{x\ln(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{1+\sqrt{x}}}{x+2} = +\infty$
4. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^x-1}{\ln(x+1)} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x+1}\ln\Big(\dfrac{x^3+4}{1-x^2}\Big) = 0$
5. $\lim_{x\to(-1)^+} (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3) = 0 \qquad \lim_{x\to 2^+} (x-2)^2\ln(x^3-8) = 0$
6. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^x = e^4 \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}} = e$
7. $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \big(\ln(1+x)\big)^{\frac{1}{\ln x}} = \mathrm{e}$

Exercice 2.7 (✍). Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n-x^n}{h} \quad (x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*) \qquad \lim_{x\to\alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} \qquad \lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x^p-a^p} \quad (a>0, \quad m,p\in\mathbb{N}^*)$$