

Programmation linéaire
Modélisation et Méthode du simplexe

Safia.Kedad-Sidhoum
Safia.kedad-sidhoum@lip6.fr

Exercice 1 : Raffinage de produits pétroliers

La raffinerie de Donges fabrique du butane, du carburant automobile, du gazole moteur et du fuel domestique à partir de deux pétroles bruts B1 et B2. Pour fabriquer tous ces produits, le raffineur a recours à quatre familles de traitement: séparation, conversion, amélioration et mélange. La phase de séparation consiste à distiller le produit brut afin d'obtenir notamment de l'essence, du gazole et des résidus (distillats). Les résidus passent ensuite par une phase de conversion (craquage catalytique) qui permet d'obtenir des produits plus légers. Les différents produits issus de la distillation sont purifiés (désulfuration) ou améliorés par une opération de reformage permettant d'augmenter leur indice d'octane. Enfin, pour obtenir chacun des produits qu'il met sur le marché, le raffineur mélange les différents produits obtenus après ces phases de façon à respecter la réglementation portant sur les produits commercialisés.

Après distillation, le brut B1 fournit 3% de butane, 15% d'essence, 40% de gazole et 15% de distillat. Le brut B2 fournit 5% de butane, 20% d'essence, 35% de gazole et 10% de distillat. Le carburant automobile est fabriqué à partir de trois ingrédients: l'essence, le butane et le distillat. Le gazole moteur est obtenu par mélange de gazole et de distillat. Et le fuel domestique peut contenir en proportions libres du distillat et du gazole. Les réglementations imposent certaines contraintes sur la qualité du carburant automobile et du gazole. Trois caractéristiques du carburant automobile sont importantes: l'indice d'octane (mesure du pouvoir antidétonant du carburant), tension de vapeur (mesure du risque d'explosion au stockage) et la volatilité (mesure de facilité de démarrage du moteur par temps froid). Enfin, une quantité maximale de soufre dans le gazole moteur est imposé par des normes antipollution. Les caractéristiques à respecter sont données par le tableau suivant:

Caract.	Butane	Es. reformée	Gaz. dés.	Distillat	Carb.	Gaz. moteur
Indice d'Octane	120	100	-	74	≥ 94	-
Tension de vapeur	60	2,6	-	4,1	$\leq 12,7$	-
Volatilité	105	3	-	12	≥ 17	-
Soufre en %	-	-	0,3	1,2	-	$\leq 0,5$

La raffinerie doit produire en un mois au moins 20000 tonnes de butane, 40000 tonnes de carburant automobile, 35000 tonnes de gazole moteur et 50000 tonnes de fuel domestique. Elle dispose pour cela de 250000 tonnes de brut B1 et de 500000 tonnes de brut B2 en stock. La capacité mensuelle de reformage est limitée à 30000 tonnes, celle de désulfuration à 40000 tonnes et celle de craquage à 50000 tonnes. Les coûts de reformage, de désulfuration et de craquage sont respectivement de 250 F, 450 F et 350 F par tonne.

Modéliser le problème sous forme de modèle de programmation linéaire pour déterminer la composition de chaque produit fini de façon à minimiser les coûts de production de la raffinerie pour la période considérée, tout en respectant les contraintes de capacité et les réglementations portant sur ces produits.

Exercice 2 : Fabrication d'Alliages

Une entreprise reçoit une commande de cinq tonnes d'acier destiné à la fabrication de coques de bateau. Cet acier doit avoir les caractéristiques particulières du tableau suivant:

Elément chimique	Pourcentage minimal	Pourcentage maximal
Carbone(C)	2	3
Cuivre (Cu)	0,4	0,6
Manganèse (Mn)	1,2	1,65

Pour fabriquer cet acier, l'entreprise dispose de sept matières premières dont les caractéristiques, les quantités disponibles et les coûts d'achat sont donnés par:

Matière première	C%	Cu%	Mn%	Stocks disponibles en kg	Coûts en F/kg
Alliage de fer 1	2,5	0	1,3	4000	1,20
Alliage de fer 2	3	0	0,8	3000	1,50
Alliage de fer 3	0	0,3	0	6000	0,90
Alliage de cuivre 1	0	90	0	5000	1,30
Alliage de cuivre 2	0	96	4	2000	1,45
Alliage d'Aluminium 1	0	0,4	1,2	3000	1,20
Alliage d'Aluminium 2	0	0,6	0	2500	1

Le problème consiste à déterminer la composition de l'acier à fabriquer de sorte que le coût total de production soit minimisé.

Question 1 : Ecrire le programme linéaire PL associé au problème sous-forme standard.

Question 2 : Résoudre le problème.

Exercice 3 : Conditions nécessaires et suffisantes

Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour s et t de façon à ce que le programme linéaire suivant:

$$\begin{cases} \max z = & x_1 & + & x_2 & & & \\ & sx_1 & + & tx_2 & & & \leq 1 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1, 2\} & & \end{cases}$$

- possède une solution optimale
- soit non-réalisable
- soit non-borné

Exercice 4 : Résolution graphique

Résoudre graphiquement le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{cases} \max z = & x_1 & + & x_2 & & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq 14 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & & & \leq 8 \\ & 2x_1 & - & x_2 & & & \leq 10 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1, 2\} & & \end{cases}$$

Exercice 5 : Méthode du simplexe

Résoudre les problèmes de programmation linéaire suivants par la méthode du simplexe:

1.

$$\begin{cases} \max z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 5 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \\ & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1, \dots, 3\} & & \end{cases}$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max z = \quad 5x_1 \quad + \quad 6x_2 \quad + \quad 9x_3 \quad + \quad 8x_4 \\ \quad \quad x_1 \quad + \quad 2x_2 \quad + \quad 3x_3 \quad + \quad x_4 \quad \leq \quad 5 \\ \quad \quad x_1 \quad + \quad x_2 \quad + \quad 2x_3 \quad + \quad 3x_4 \quad \leq \quad 3 \\ x_i \geq 0, \quad \forall \quad i \in \{1, \dots, 4\} \end{array} \right.$$

3.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max z = \quad 2x_1 \quad + \quad x_2 \\ \quad \quad 2x_1 \quad + \quad 3x_2 \quad \leq \quad 3 \\ \quad \quad x_1 \quad + \quad 5x_2 \quad \leq \quad 1 \\ \quad \quad 2x_1 \quad + \quad x_2 \quad \leq \quad 4 \\ \quad \quad 4x_1 \quad + \quad x_2 \quad \leq \quad 5 \\ x_i \geq 0, \quad \forall \quad i \in \{1, 2\} \end{array} \right.$$