Ordonnancement périodique pour un problème à précédences linéaires

Claire Hanen et Alix Munier Kordon

Claire.Hanen@lip6.fr Alix.Munier@lip6.fr

Laboratoire Lip6

Plan de la présentation

- Présentation
- Etat de l'art
- Ordonnancements périodiques
- Le cas unitaire
- Le cas général

Ordonnancement cyclique

- $\mathcal{T} = \{1, \ldots, n\}$ tâches répétées à l'infini.
- $< i, k >$:occurrence k de la tâche i,
- $t^\sigma(< i, k >), C^\sigma(< i, k >)$ dates d'exécution et de fin dans un ordonnancement σ.
- Critère d'optimisation: temps de cycle moyen

$$limsup_{k \to \infty} \max_{i \in T} \frac{C^\sigma(< i, k >)}{k}$$

Précédences linéaires

Contraintes de précédence décrites de manière générique:

Contrainte **Uniforme** lorsque $p_{ij} = p'_{ij} = 1$.

$$\forall k \geq 0, \quad t(< i, p_{ij}k + q_{ij} >) + l_i \leq t(< j, p'_{ij}k + q'_{ij}$$

Précédences linéaires

$$p_{12} = 2, q_{12} = 1, p'_{12} = 3, q'_{12} = 2$$

$$<1,1> \rightarrow <1,2> \rightarrow <1,3> \rightarrow <1,4> \rightarrow <1,5> \rightarrow <1,6> \rightarrow <1,7> \rightarrow <1,8> \quad .$$

$$<2,1> \rightarrow <2,2> \rightarrow <2,3> \rightarrow <2,4> \rightarrow <2,5> \rightarrow <2,6> \rightarrow <2,7> \rightarrow <2,8> \quad .$$

Motivation

Pour les contraintes uniformes, les ordonnancements périodiques sont :

- Dominants
- Calculables en temps polynômial

Qu'en est-il dans le cas linéaire?

Faisabilité

- Notion de Poids d'un arc:

$$\pi_{ij} = \frac{p'_{ij}}{p_{ij}}$$

- Poids d'un chemin μ: produit du poids des arcs.

Faisabilité

- Notion de Poids d'un arc:

$$\pi_{ij} = \frac{p'_{ij}}{p_{ij}}$$

- Poids d'un chemin μ: produit du poids des arcs.

Theorème 1. *Si un graphe linéaire est ordonnançabl[e] alors il ne comporte pas de circuits de poids inférieur [à] 1*

Faisabilité

- Notion de Poids d'un arc:

$$\pi_{ij} = \frac{p'_{ij}}{p_{ij}}$$

- Poids d'un chemin μ: produit du poids des arcs.

Theorème 1. *Si un graphe linéaire est ordonnançabl alors il ne comporte pas de circuits de poids inférieur à 1*

La condition n'est pas suffisante

Cas des graphes unitaires

Définition 2. *Un graphe linéaire est unitaire ssi:*

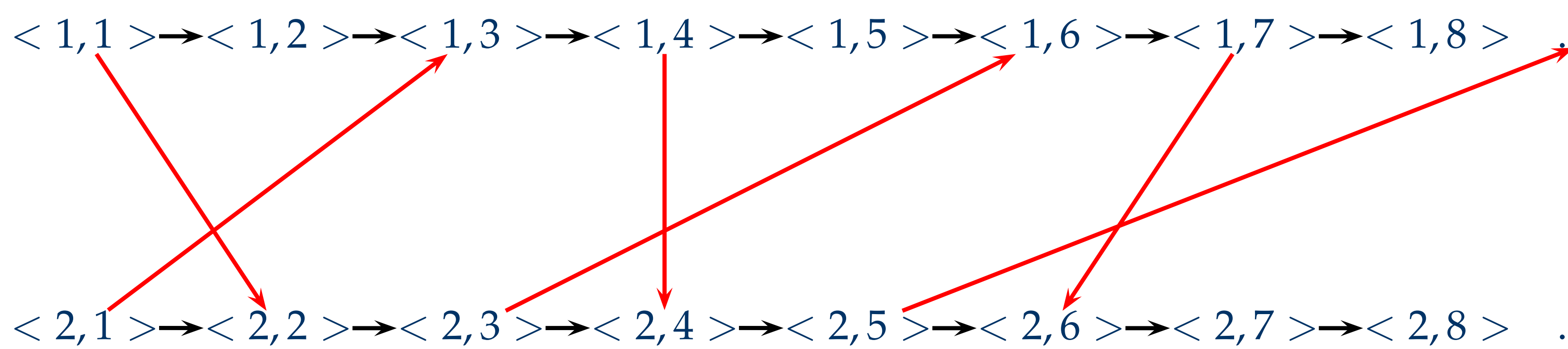
- *il est fortement connexe*
- *tous ses circuits sont de poids 1*

Cas des graphes unitaires

$$(p = 2, q = 1, p' = 3, q' = 3), \pi = \frac{3}{2}$$

$$(p = 3, q = 1, p' = 2, q' = 2), \pi = \frac{2}{3}$$

Cas des graphes unitaires

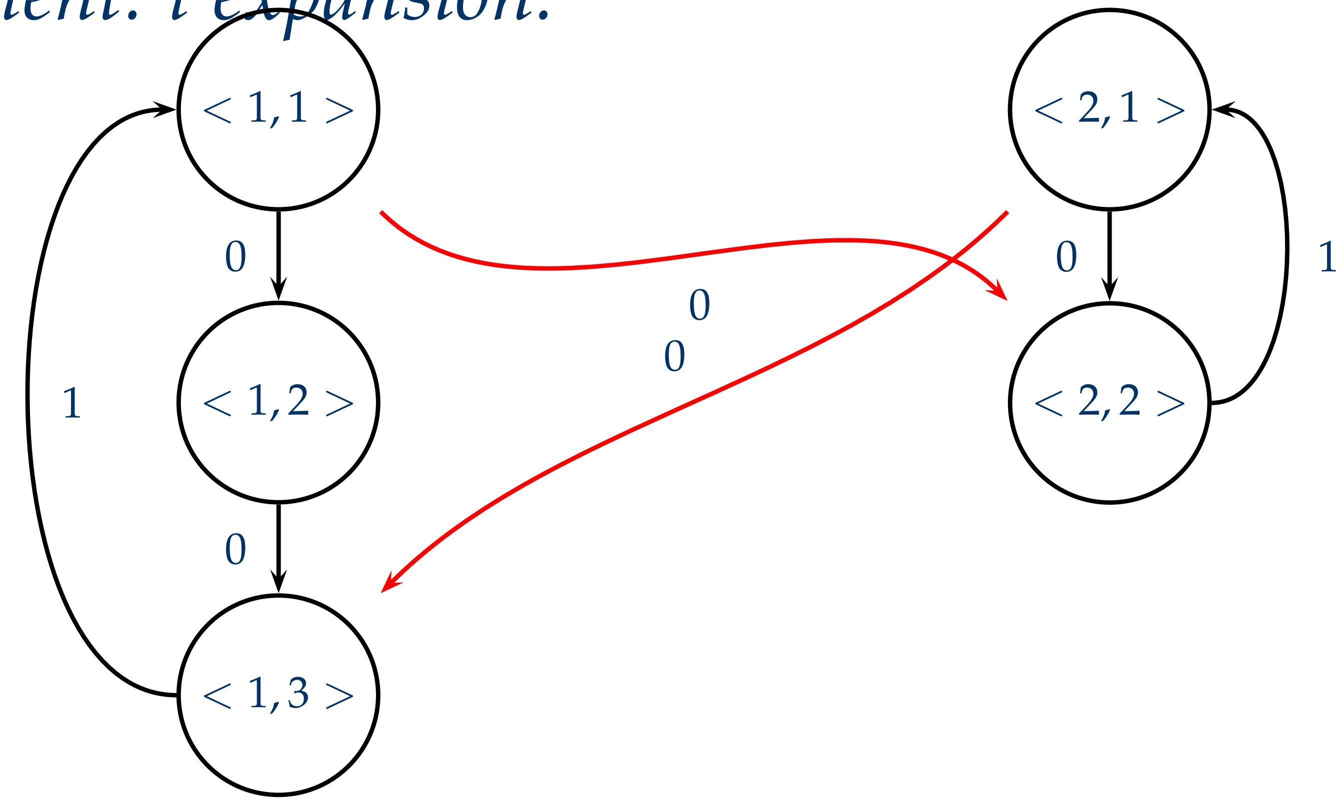


Expansion d'un graphe unitaire

Theorème 3. *En dupliquant les sommets, on peut obtenir un graphe uniforme au comportement équivalent: l'expansion.*

Expansion d'un graphe unitaire

Theorème 3. *En dupliquant les sommets, on peut obtenir un graphe uniforme au comportement équivalent: l'expansion.*



Expansion d’un graphe unitaire

Theorème 3. *En dupliquant les sommets, on peut obtenir un graphe uniforme au comportement équivalent: l’expansion.*

- La taille du graphe expansé peut être exponentielle
- CNS de faisabilité
- pas calculable en temps polynomial

Cas général

- Pas de CNS de faisabilité.

Cas général

- Pas de CNS de faisabilité.
- Pour système ordonnançable, algorithme de calcul des fréquences optimales

Cas général

- Pas de CNS de faisabilité.
- Pour système ordonnançable, algorithme de calcul des fréquences optimales
- Décomposition d'un graphe en composantes unitaires

Cas général

- Pas de CNS de faisabilité.
- Pour système ordonnançable, algorithme de calcul des fréquences optimales
- Décomposition d'un graphe en composantes unitaires
- Expansion des composantes

Cas général

- Pas de CNS de faisabilité.
- Pour système ordonnançable, algorithme de calcul des fréquences optimales
- Décomposition d'un graphe en composantes unitaires
- Expansion des composantes
- Calcul des fréquences au sein de chaque composante

Cas général

- Pas de CNS de faisabilité.
- Pour système ordonnançable, algorithme de calcul des fréquences optimales
- Décomposition d'un graphe en composantes unitaires
- Expansion des composantes
- Calcul des fréquences au sein de chaque composante
- Calcul des fréquences optimales sur le graph réduit (chaque composante réduite à un sommet)

Ordonnancements périodiques

Définition 4. *Un ordonnancement σ est périodique s*

$$\forall k \geq 0, \forall i \in \mathcal{T}, t^{\sigma}(< i, k >) = t_i^{\sigma} + (k-1) w_i^{\sigma}$$

w_i^{σ} est la période de la tâche i.

Ordonnancements périodiques

Définition 4. *Un ordonnancement σ est périodique s*

$$\forall k \geq 0, \forall i \in \mathcal{T}, t^{\sigma}(< i, k >) = t_i^{\sigma} + (k-1)w_i^{\sigma}$$

w_i^{σ} est la période de la tâche i.

Cas uniforme: tous les w_i^{σ} sont égaux

Ordonnancements périodiques

Définition 4. *Un ordonnancement σ est périodique s*

$$\forall k \geq 0, \forall i \in \mathcal{T}, t^{\sigma}(< i, k >) = t_i^{\sigma} + (k-1)w_i^{\sigma}$$

w_i^{σ} est la période de la tâche i.

Cas uniforme: tous les w_i^{σ} sont égaux

Critère d'optimisation:

$$\min_{\sigma} \max_{i \in \mathcal{T}} w_i^{\sigma}$$

Une contrainte

$$\begin{aligned}
&\forall k \geq 0 \\
&t_j - t_i \quad \geq l_i \\
&\qquad\qquad + (w_i p_{ij} - \quad w_j p'_{ij})k \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + w_i(q_{ij} - 1) - w_j(q'_{ij} - 1)
\end{aligned}$$

Une contrainte

$$\begin{aligned}
&\forall k \geq 0 \\
&t_j - t_i \quad \geq l_i \\
&\qquad\qquad +(w_i p_{ij} - \quad w_j p'_{ij})k \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +w_i(q_{ij} - 1) - w_j(q'_{ij} - 1)
\end{aligned}$$

Si $k \to \infty$, il faut que:

$$w_i p_{ij} - w_j p'_{ij} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{w_i}{w_j} \leq \pi_{ij}$$

Une contrainte

$$
\begin{aligned}
&\forall k \geq 0 \\
&t_j - t_i \quad \geq l_i \\
&\qquad\qquad +(w_i p_{ij} - \quad w_j p'_{ij})k \\
&\qquad\qquad\qquad +w_i(q_{ij} - 1) - w_j(q'_{ij} - 1)
\end{aligned}
$$

On a alors: $t_j - t_i \geq l_i + w_i(q_{ij} - 1) - w_j(q'_{ij} - 1)$

Un programme linéaire

$$\begin{cases} Min & B \\ \forall\ arc\ (i,j) & w_i p_{ij} - w_j p'_{ij} \leq 0 \\ & t_j - t_i \geq l_i + w_i(q_{ij} - 1) - w_j(q'_{ij} - 1 \\ \forall i \in \mathcal{T} & w_i \leq B \end{cases}$$

Un programme linéaire

$$\begin{cases} Min & B \\ \forall\ arc\ (i,j) & w_i p_{ij} - w_j p'_{ij} \leq 0 \\ & t_j - t_i \geq l_i + w_i(q_{ij} - 1) - w_j(q'_{ij} - 1 \\ \forall i \in \mathcal{T} & w_i \leq B \end{cases}$$

Permet de déterminer un ordonnancement pé
odique optimal en temps polynomial

Cas unitaire

Pour tout chemin μ de i à j,

$$\frac{w_i}{w_j} \leq \pi(\mu)$$

Pour tout chemin ν de j à i,

$$\frac{w_j}{w_i} \leq \pi(\nu) = \frac{1}{\pi(\mu)} \Rightarrow \frac{w_i}{w_j} \geq \pi(\mu)$$

Cas unitaire

Pour tout chemin μ de i à j,

$$\frac{w_i}{w_j} \leq \pi(\mu)$$

Pour tout chemin ν de j à i,

$$\frac{w_j}{w_i} \leq \pi(\nu) = \frac{1}{\pi(\mu)} \Rightarrow \frac{w_i}{w_j} \geq \pi(\mu)$$

Si G est unitaire, pour tout arc (i, j), $\frac{w_i}{w_j} = \pi_{ij}$

Périodes faisables

- Les périodes qui satisfont le système:

$$\forall\ arc\ (i,j), \frac{w_i}{w_j} = \pi_{ij}$$

Périodes faisables

- Les périodes qui satisfont le système:

$$\forall \, arc \; (i,j), \frac{w_i}{w_j} = \pi_{ij}$$

- Sont tous les multiples rationnels d'une solution entière W_i: $w_i = \lambda W_i$

Périodes faisables

- Les périodes qui satisfont le système:

$$\forall\, arc\ (i,j), \frac{w_i}{w_j} = \pi_{ij}$$

- Sont tous les multiples rationnels d'une solution entière W_i: $w_i = \lambda W_i$
- Les W_i se calculent par un algorithme de chemin en temps polynômial.

Une contrainte du PL

La contrainte associée à un arc se réécrit:

$$t_j - t_i \geq l_i - \lambda(W_j(q'_{ij} - 1) - W_i(q_{ij} - 1))$$

Une contrainte du PL

La contrainte associée à un arc se réécrit:

$$t_j - t_i \geq l_i - \lambda(W_j(q'_{ij} - 1) - W_i(q_{ij} - 1))$$

Les termes constants font apparaître la forme générique

$$t_j - t_i \geq L(i,j) - \lambda H(i,j)$$

Existence de solutions

On peut appliquer les résultats connus utilisés pour les graphes uniformes:

- $H(i,j) = W_j(q'_{ij} - 1) - W_i(q_{ij} - 1))$ hauteur d'un arc
- il existe une solution ssi tous les circuits du graphe sont de hauteur strictement positive
- Cette condition est calculable en temps polynomial (algorithme de chemins).

Un contre-exemple

Dans certains cas, il peut ne pas exis
d'ordonnancement périodique alors qu'il existe
ordonnancement.

Un contre-exemple

Dans certains cas, il peut ne pas exister d'ordonnancement périodique alors qu'il existe u ordonnancement.

$$(p = 2, q = 2, p' = 3, q' = 2), \pi = \frac{3}{2}$$

$$(p = 3, q = 1, p' = 2, q' = 1), \pi = \frac{2}{3}$$

$W_1 = 2$

$W_2 = 3$

$H(1, 2) = 0$

$H(2, 1) = -$

Un contre-exemple

Dans certains cas, il peut ne pas exister d'ordonnancement périodique alors qu'il existe u ordonnancement.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
< 1,1 > \arrow[r] \arrow[d] & < 1,2 > \arrow[r] & < 1,3 > \arrow[r] & < 1,4 > \arrow[r] \arrow[dl] & < 1,5 > \arrow[r] & < 1,6 > \arrow[r] & < 1,7 > \arrow[r] \arrow[dll] & < 1,8 > & \ldots \\
< 2,1 > \arrow[r] & < 2,2 > \arrow[r] \arrow[u] & < 2,3 > \arrow[r] & < 2,4 > \arrow[r] \arrow[ur] & < 2,5 > \arrow[r] & < 2,6 > \arrow[r] \arrow[urr] & < 2,7 > \arrow[r] & < 2,8 > & \ldots
\end{tikzcd}$$

Optimisation

- Comme $w_i = \lambda W_i$, le critère devient $\min \lambda$.
- Pour tout circuit C, $\lambda \geq \frac{L(C)}{H(C)}$
- La valeur la plus petite est celle du circuit critique:

$$\lambda_{min} = \max_{C\ circuit} \frac{L(C)}{H(C)}$$

- Cette valeur est calculable en temps polynomial.
- On a un ordonnancement périodique optima

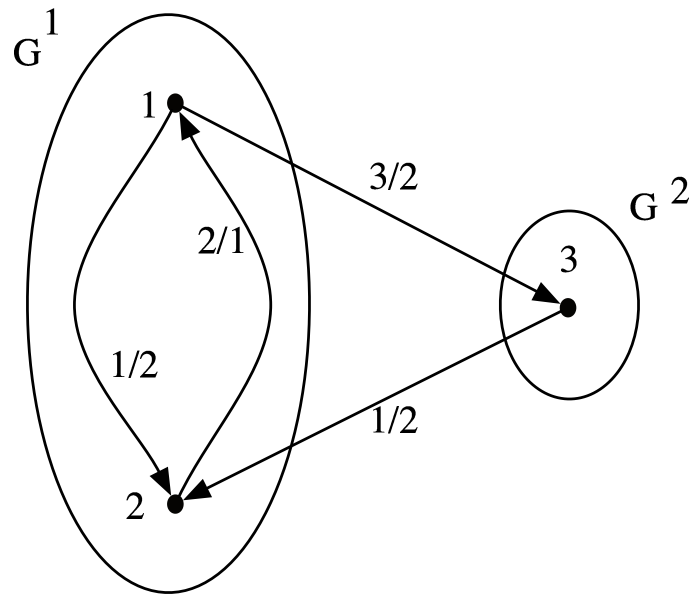
****

Décomposition en composantes unitaires

Soit $G^1 = (V^1, E^1)$, $G^2 = (V^2, E^2)$,...,
$G^u = (V^u, E^u)$ la décomposition du graphe
$G = (V, E)$ en composantes unitaires.

- $\{V^\alpha, \alpha = 1, ..., u\}$ est une partition de V.
- $G^\alpha = (V^\alpha, E^\alpha), \alpha = 1, ..., u$ est un sous-graphe partiel de G unitaire.
  Soit $W_i^\alpha, i \in V^\alpha$ le vecteur période et la valeur $\lambda_{\min}^\alpha$ minimale.

Exemple



- $W_1^1 = 2, W_2^1 = 4, \lambda^1_{\min} = 3.$
- $W_3^2 = 3, \lambda^2_{\min} = 1.$

Une borne inférieure

Si les valeurs $\lambda^1, ..., \lambda^u$ permettent de construire un ordonnancement périodique, alors:

- Pour tout $\alpha \in \{1, ..., u\}$, $\lambda^\alpha \geq \lambda^\alpha_{\min}$.
- Pour tout arc (i, j) entre G^α et G^β, $\frac{\lambda^\beta}{\lambda^\alpha} \geq \frac{W_i^\alpha p_{ij}}{W_j^\beta p'_{ij}}$

$\lambda^1_{\text{opt}}, ..., \lambda^u_{\text{opt}}$ est la solution de ce système d'équations de valeur minimale.

Calcul pour l’exemple

- $\lambda^1 \geq \lambda^1_{\min} = 3, \lambda^2 \geq \lambda^2_{\min} = 1.$
- $\dfrac{\lambda^2}{\lambda^1} \geq \dfrac{W_1^1 p_{13}}{W_3^2 p'_{13}} = \dfrac{4}{9}$
- $\dfrac{\lambda^1}{\lambda^2} \geq \dfrac{W_3^2 p_{32}}{W_2^1 p'_{32}} = \dfrac{3}{2}$

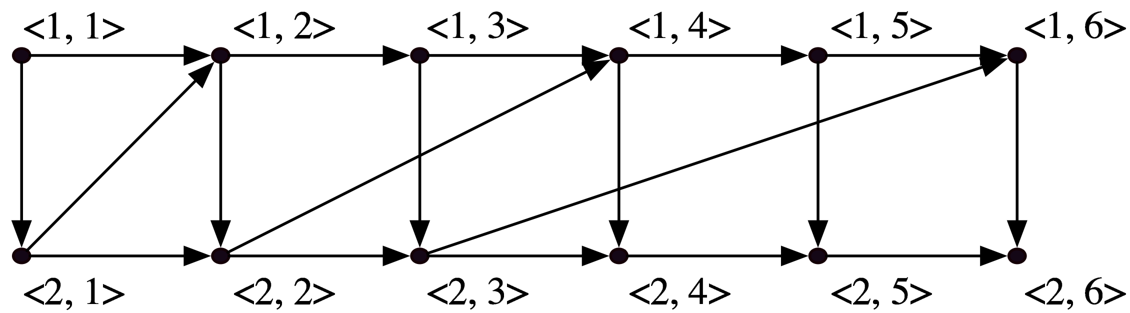
On obtient $\lambda^1_{\text{opt}} = \dfrac{9}{2}$ et $\lambda^2_{\text{opt}} = 3$

Question

Peut on construire un ordonnancement périodique tel que la période de chaque tâche $i \in V^{\alpha}$ soit $\lambda^{\alpha}_{\mathrm{opt}} W^{\alpha}_{i}$?

Réponse: Non

Exemple



$\forall n \geq 0, t(1, n+1) + 1 \leq t(2, n),$
$\forall n \geq 0, t(2, n+1) + 1 \leq t(2, 2n+2)$

L'ordonnancement périodique optimal vérifie w_1

2 et $w_2 = 2$.

Exemple (suite)

- Deux composantes unitaires $G^1 = (\{1\}, \emptyset)$ et $G^2 = (\{2\}, \emptyset)$ avec $W_1^1 = 1$, $\lambda_{\min}^1 = 1$, $W_2^2 = 1$, $\lambda_{\min}^2 = 1$.
- Le système à résoudre est

$$\begin{array}{ll} \lambda^1 \geq 1, & \lambda^2 \geq 1 \\ \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \geq 1, & \frac{\lambda^2}{\lambda^1} \geq \frac{1}{2} \end{array}$$

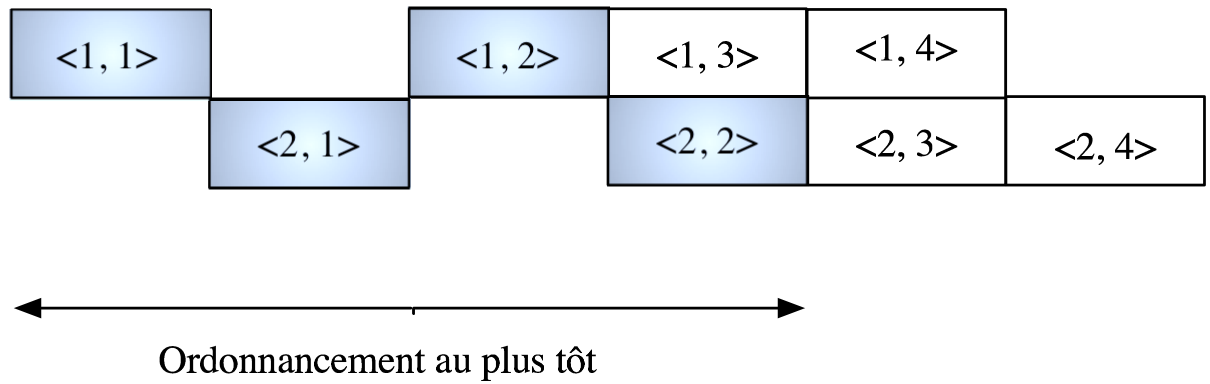
On obtient $\lambda_{\text{opt}}^1 = 1$ et $\lambda_{\text{opt}}^2 = 1$.

Ordonnancement quasi-périodiques

Définition 5. *Un ordonnancement quasi-périodique est un ordonnancement dont les dates d'exécutions vérifient :*
$\exists n_i^0 \geq 0, \forall n \geq n_i^0, t(<i,n>) = t_i + (n-1)w_i$

Theorème 6. *Il existe un ordonnancement quasi-périodique tel que la période de chaque tâche* $i \in V^\alpha$ *soit* $\lambda^\alpha_{\mathrm{opt}} W_i^\alpha$.

Construction d'un ordonnancement quasi-périodique



Ordonnancement quasi-périodique avec

$n_1^0 = 3, n_2^0 = 3, w_1 = 1, w_2 = 1$

Construction d'un ordonnancement quasi-périodique

Soit un arc $(i, j) \in E$ avec $i \in V^\alpha$, $j \in V^\beta$.
Supposons que i (*resp.* j) soit exécutée selon un ordonnancement quasi-périodique de période $\lambda^\alpha_{\text{opt}} W^\alpha_i$ (*resp.* $\lambda^\beta_{\text{opt}} W^\beta_j$).

$$t_j - t_i \geq L(i, j) - kH(i, j)$$

avec

$$L(i, j) = l_i + \lambda^\alpha_{\text{opt}} W^\alpha_i (q_{ij} - 1) - \lambda^\beta_{\text{opt}} W^\beta_j (q'_{ij} - 1)$$

$$H(i, j) = \lambda^\beta_{\text{opt}} W^\beta_j p'_{ij} - \lambda^\alpha_{\text{opt}} W^\alpha_i p_{ij}$$

Construction d'un ordonnancement quasi-périodique

$$\mathcal{C} = \{\text{circuit} \quad c \quad \text{of} \quad G, \pi(c) > 1\}$$

Lemme 7. *Pour tout $c \in \mathcal{C}$, $H(c) > 0$.*

Soit alors

$$k_0 = \max_{c \in \mathcal{C}} \frac{L(c)}{H(c)}$$

Pour tout $i \in V$, n_i^0 est fonction de k_0.

Réseaux de Petri Temporisés généralisés

Ces résultats s'appliquent:

- algorithme spécifique pour le calcul d'un ordonnancement périodique pour un réseau unitaire.
- construction d'un ordonnancement quasi-périodique pour un réseau quelconque

Conclusions

Le calcul d'un ordonnancement périodique est polynomial, mais

1. pour une composante unitaire, il peut ne pas en exister.
2. pour un graphe quelconque, si chaque composante unitaire admet un ordonnancement périodique, on peut construire un ordonnancement quasi-périodique de période minimale.

Conclusions (suite)

Les questions initiales restent ouvertes: étant donné un graphe linéaire quelconque,

1. peut on déterminer un algorithme polynomial pour l'existence d'un ordonnancement ?
2. pour le calcul d'un ordonnancement de débit maximal ?