N. Chèze, B. Desgraupes, L. Mesnager

Épreuve de rattrapage de Mathématiques 2

Durée de l'épreuve : 2 h

L'utilisation de calculatrices et d'appareils électroniques est interdit. Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1. On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-1}{y^2-1}}$$

(1) Déterminer son domaine de définition et le représenter graphiquement.

(2) Déterminer l'équation de la ligne de niveau de hauteur 1 et la représenter graphiquement.

Exercice 2.

1) Soit q la forme quadratique associée à la matrice carrée d'ordre 2 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.a) Écrire q sous la forme $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

1.b) Quelle est la signature de q ?

2) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donnée par l'expression

$$f(x,y) = 4\,x - 2\,y - 2\,x\,y + 5\,x^2 + 2\,y^2 + 1$$

2.a) Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s) de f.

2.b) Pour chaque point stationnaire (x_0, y_0), écrire le développement limité d'ordre 2 de f en (x_0, y_0).

2.c) Quelle est la nature de ce(s) point(s) stationnaire(s) ?

Exercice 3.

Soient a, b, c trois réels et $(\mathcal{S})$ le système linéaire :

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ x - 2y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

(1) Écrire matriciellement $(\mathcal{S})$ sous la forme $AX = B$ en précisant les valeurs de A, X et B.

(2) Résoudre $(\mathcal{S})$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

(3) En déduire la matrice inverse A^{-1}.

(4) Calculer A^{-1} en utilisant la méthode de la matrice témoin.

Exercice 4. Soient $u_1 = (-1, 1, -1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$. On note V le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u_2 et u_3 et W le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur u_1.

(1) La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$

(2) Établir une équation de V.

(3) Décomposer le vecteur $u_4 = (2, 1, 3)$ sur la famille $\{u_2, u_3\}$.

(4) Établir une équation de W.