5 Test du Khi-deux d'ajustement

Exercice 5.1

Contexte :
$\mathcal{P}$: population d'individus soumis à l'exposition répétée d'une couleur (couleur A).
Variable X : « couleur choisie après exposition », qualitative à $l = 3$ modalités « A »,« B », « C ».
Si l'exposition répétée de la couleur n'a pas d'effet, chaque couleur sera choisie par 1/3 des individus.
La distribution théorique testée pour X est donc la distribution uniforme :

couleur	A	B	C
proportion p_{i0}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Hypothèses : $\begin{cases} H_0 : \text{La distribution des couleurs est uniforme dans la population} \\ \qquad \text{(chaque couleur est choisie par 1/3 des individus)} \\ H_1 : \text{La distribution des couleurs n'est pas uniforme dans la population} \\ \alpha = 5\% \end{cases}$

Observations :
On dispose d'un échantillon de taille $n = 46 + 31 + 37 = 114$.

Tableau des effectifs observés sur l'échantillon et des effectifs théoriques attendus sous H_0 :

	A	B	C
effectif observé n_i	46	31	37
effectif théorique $n\,p_{i0}$	$114 \times \frac{1}{3} = 38$	$114 \times \frac{1}{3} = 38$	$114 \times \frac{1}{3} = 38$

Statistique du test : $Q^2 = \sum \dfrac{(N_i - n\,p_{i0})^2}{n\,p_{i0}}$

Valeur observée $q^2_{\text{obs}} = \dfrac{(46-38)^2}{38} + \dfrac{(31-38)^2}{38} + \dfrac{(37-38)^2}{38} = 3.$

Loi de Q^2 sous H_0 :
On verifie les conditions d'application du test :
$n = 114 \geq 30$ et tous les effectifs théoriques sont égaux à $38 \geq 5$.
Donc, Q^2 suit approximativement la loi du Khi-deux à $l - 1 = 3 - 1 = 2$ ddl, (loi du χ^2 à 2 ddl).

IA et RC pour Q^2, associés au risque $\alpha = 5\%$:
On rejette H_0 pour les valeurs de Q^2 « trop » grandes : RC à l'extrémité droite du domaine de Q^2.
$IA = [0\,;\,5,991]$ où $5,991$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha = 0,95$ de la loi du χ^2 à 2 ddl.

Décision : $q^2_{\text{obs}} \in IA$. On ne peut pas conclure que l'exposition répétée à la couleur A modifie le choix des individus. On conserve H_0 avec un risque d'erreur β inconnu.

Remarque 1 : la p-valeur $\alpha_{\text{obs}} = P_{H_0}(Q^2 \geq 3) = 22,31\%$ (valeur obtenue par logiciel).
Remarque 2 : le test ne permet pas de tester si l'exposition répétée de la couleur A augmente la proportion d'individus choisissant cette couleur. Pour cela, il faudrait faire un test de proportion.

Exercice 5.2

On étudie la loi du « résultat du croisement » de pois jaunes et lisses et de pois verts et ridés.
La loi théorique testée est la loi de Mendel :

classe	JL	JR	VL	VR
proportion théorique	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : \text{Le « résultat du croisement » obéit à la loi de Mendel} \\ H_1 : \text{Le « résultat du croisement » n'obéit pas à la loi de Mendel} \\ \alpha = 1\% \end{cases}$$

Effectifs théoriques :

Echantillon de taille $n = 556$.

classe	« JL »	« JR »	« VL »	« VR »
$n\, p_{i0}$	$312,75$	$104,25$	$104,25$	$34,75$

Les conditions d'application du test sont vérifiées.

IA pour Q^2 : $IA = [0\,; 11,345]$ (loi du χ^2 à 3 ddl) et $q^2_{\text{obs}} = 0,47 \in IA$.

Exercice 5.3

On étudie la distribution du « niveau de phobie » dans une population particulière de patients atteints de phobie sociale et qui ont suivi une thérapie cognitive-comportementale.
La loi théorique testée est la distribution du « niveau de phobie » pré-thérapie :

niveau	niveau 1	niveau 2	niveau 3
proportion théorique	0,30	0,40	0,30

Hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : \text{Les distributions du « niveau de phobie » post- et pré-thérapie sont identiques} \\ H_1 : \text{Les distributions du « niveau de phobie » post- et pré-thérapie sont différentes} \\ \alpha = 5\,\% \end{cases}$$

Effectifs théoriques :

Echantillon de taille $n = 200$.

Niveau de phobie	niveau 1	niveau 2	niveau 3
$n\, p_{i0}$	60	80	60

Les conditions d'application du test sont vérifiées.

IA pour Q^2 : $IA = [0\,; 5,991]$ (χ^2 à 2 ddl) et $q^2_{\text{obs}} = 86,25 \notin IA$.

Exercice 5.4

On étudie la distribution des notes à un test de raisonnement, obtenues par les élèves de 5ème en 1987.
La loi théorique testée est la distribution des notes en 1982 :

Note	$X < 100$	$100 \leq X < 110$	$110 \leq X < 120$	$120 \leq X < 130$	$130 \leq X$
proportion théorique	0,172	0,19	0,17	0,179	0,289

Hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : \text{La distribution des notes de 1987 est identique à la distribution des notes de 1982} \\ H_1 : \text{la distribution des notes de 1987 est différente de la distribution des notes de 1982} \\ \alpha = 5\% \end{cases}$$

Effectifs théoriques :

Echantillon de taille $n = 50$.

Note	$X < 100$	$100 \leq X < 110$	$110 \leq X < 120$	$120 \leq X < 130$	$130 \leq X$
$n\,p_{i0}$	$8,6$	$9,5$	$8,5$	$8,95$	$14,45$

Les conditions d'application du test sont vérifiées.

IA pour Q^2 : $IA = [0\,;\,9,488]$ (χ^2 à 4 ddl) et $q^2_{\text{obs}} = 11,116 \notin IA$.

Exercice 5.5

Question 1 Test du Khi-deux d'ajustement.

On étudie la popularité de 4 candidats à une élection municipale.
Si les candidats ont la même côte de popularité, chacun est choisi par 1/4 des habitants.
La distribution théorique testée est la loi uniforme :

candidat	1	2	3	4
proportion théorique	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Hypothèses : $\begin{cases} H_0 : \text{les candidats ont la même côte de popularité} \\ H_1 : \text{les candidats n'ont pas la même côte de popularité} \\ \alpha = 5\% \end{cases}$

Effectifs théoriques :

Echantillon de taille $n = 200$.

candidat	1	2	3	4
$n\,p_{i0}$	50	50	50	50

Les conditions d'application du test sont vérifiées.

IA pour Q^2 : $IA = [0\,;\,7,815]$ (χ^2 à 3 ddl) et $q^2_{\text{obs}} = 21 \notin IA$.

Question 2 Test de proportion.

p proportion d'habitants favorables au candidat n° 2.

Hypothèses : $\begin{cases} H_0 : p = 0,5 \\ H_1 : p < 0,5 \text{ unilatérale gauche} \\ \alpha = 2\% \end{cases}$.

Observations : $n = 200\,;\ f_{\text{obs}} = \frac{75}{200} = 0,375$ et $z_{\text{obs}} = \dfrac{0,375 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{200}}} = -3,536$.

IA pour F_n : $IA = [0,427\,;\,1]$ et $f_{\text{obs}} \notin IA$.
IA pour Z_n : $IA = [-2,055\,;\,+\infty[$ et $z_{\text{obs}} \notin IA$.
p-valeur $\alpha_{\text{obs}} \simeq 0,0002$.