LES FONCTIONS PRIMITIVES

La détermination des fonctions primitives d'ordre « m » s'effectue dans « Mathematica » à l'aide de la fonction « Integrate ». Sous la forme symbolique, les fonctions primitives mathématiquement non définies s'écrivent comme une suite de fonctions imbriquées entre crochets. Sous la forme numérique, les fonctions primitives mathématiquement définies s'expriment comme une suite de fonctions imbriquées à l'aide de crochets, les variables étant précisées dans un intervalle de définition donné entre accolades.

a) Sur le modèle de l'expression (1), chaque fonction symbolique primitive « Integrate » (f_0=Integrate) doit être suivie, entre crochets, de la fonction mathématique d'origine f_l avec sa (ses) variable(s) entre crochets (ici $[x_1, x_2, x_i\ldots, x_n]$) et des variables effectivement utilisées dans l'ordre des opérations d'intégration successives. La fonction intégrée d'ordre « m » par rapport aux « m » variables x_i , x_n , x_i , x_k , … ($i \leq n$ et $k \leq n$) se formule comme

$$\text{Integrate}[f_l[x_1 , x_2 , \ldots, x_i , .., x_n] , x_i , x_n , x_i , x_k , \ldots.]$$

Ici, comme en mathématiques, les opérations d'intégration s'effectuent de manière successive de droite à gauche. La fonction f_l est d'abord intégrée avec la variable utilisée placée la plus à droite, puis avec la variable précédente, …. et ainsi de suite jusqu'à la première variable utilisée. A titre d'illustration, nous avons demandé à « Mathematica » d'intégrer par rapport à « x » d'abord la fonction logarithmique népérienne Log[x], puis la fonction polynomiale $f_l[x]$ définie précédemment à la ligne d'entrée n°48 comme l'attestent les lignes d'opération n°57 et n°58 de la copie d'écran figurant à la page suivante.

Ceci fait, nous avons décidé de calculer successivement la fonction intégrée d'ordre un par rapport à « x » du polynôme obtenu à la ligne de sortie n°58 et la fonction intégrée d'ordre deux par rapport à « x » de la fonction d'origine $f_l[x]$. L'intégration pas à pas (opération par opération) et l'intégration d'ordre deux de la variable « x » dans la fonction f_l conduisent ici fort heureusement au même résultat comme on peut le vérifier aux lignes de sortie n°59 et n°60 ci-après.

L'intégration d'une fonction à plusieurs variables s'effectue dans des conditions similaires à celles indiquées précédemment comme l'illustre le cas de la fonction $h_l[x,y]=x^3/y^3$ munie des deux variables « x » (x_1=x) et « y » (x_2=y). Définie à la ligne d'entrée n°61 ci-après, cette fonction fait l'objet, à la ligne d'opération suivante, d'une intégration d'abord par rapport à « y », puis par rapport à « x ».

b) Sur le modèle de l'expression (2), chaque fonction numérique primitive «Integrate » (f_0=Integrate) doit être suivie entre crochets de la fonction mathématique d'origine f_l avec sa (ses) variable(s) entre crochets (ici $[x_1, x_2, x_i\ldots, x_n]$) et, entre accolades, des variables effectivement utilisées dans l'ordre des opérations d'intégration successives.

Telnet – moliere.u-paris10.fr VT

Connexion Edition Terminal

In[57] : = *Integrate[Log[x],x]*
Out[57] = -x + x Log[x]
In[58] : = *Integrate[f1[x],x]*
Out[58] = $-10\,x + 2\,x^2 - 5\,x^3 + x^4$
In[59] : = *Integrate[%,x]*
Out[59] = $-5\,x^2 + \frac{2\,x^3}{3} - \frac{5\,x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$
In[60] : = *Integrate[f1[x],x,x]*
Out[60] = $-5\,x^2 + \frac{2\,x^3}{3} - \frac{5\,x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$
In[61] : = *h1[x_,y_]: = (x^3)/(y^3)*
In[62] : = *Integrate[h1[x,y],x,y]*
Out[62] = $\frac{-y^4}{8\,x^2}$
In[63] : = *Integrate[Log[x],{x,1,Infinity}]*
Out[63] = Integral of Log[x] does not converge on {1,Infinity}
In[64] : =*h2[x_,y_]: = (x+y)^2*
In[65] : = *Integrate[h2[x,y], {x,1,2},{y,1,2}]*
Out[65] = $\frac{55}{6}$
In[66] : = *Clear[f1[x],g[x,y],h1[x,y],h2[x,y]]*

Entre deux accolades figurent la variable « x_i », la borne inférieure « a_i » et la borne supérieure « b_i ». La fonction intégrée d'ordre « m » par rapport aux « m » variables x_i , x_n , x_i, x_k , …($i \leq n$ et $k \leq n$) s'écrit alors comme

Integrate[f_1[x_1 , x_2 , …, x_i , .., x_n] ,{x_j, a_j, b_i},{x_m , a_m, b_m },{x_i , a_j, b_i },{x_k , a_k, b_k },……]

A titre d'exemple, nous avons choisi d'abord d'intégrer la fonction logarithmique népérienne Log[x] avec « x » compris entre 1 et l'infini. Même si la fonction symbolique primitive x.(Log[x]-1) a pu être calculée à la ligne d'opération n°57, la fonction numérique recherchée s'avère pourtant ici impossible à déterminer, l'intégrale de la fonction logarithmique divergeant entre les bornes 1 et l'infini comme l'indique obligeamment « Mathematica » à la ligne de sortie n°63. Le calcul de l'intégrale de la fonction $h_2[x,y]=(x+y)^2$ définie à la ligne d'entrée suivante ne conduit pas, fort heureusement, à un tel résultat quand les variables « x » et « y » sont toutes deux comprises entre 1 et 2 comme l'indique la ligne d'opération n°65.