

# LA DEFINITION ET L'UTILISATION

## DE FONCTIONS MATHEMATIQUES SIMPLES

Définies par « Mathematica » ou par l'utilisateur, les fonctions mathématiques sont calculées sous la forme symbolique ou sous la forme numérique à l'aide de crochets et d'accolades. Dénommée « f », la fonction symbolique entrée comprend entre crochets, d'abord les « n » variable(s) associées à la fonction (par exemple,  $[x_1, x_2, x_i, \dots, x_n]$ ) puis, dans l'ordre de leur utilisation, les variables utilisées entre accolades. Dans le cas général, la fonction symbolique s'écrit sous la forme

$$f [ [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n], \{x_1, x_2, \dots, x_i, x_n\} ]$$

ceci même si la fonction est estimée ultérieurement à l'aide de la commande numérique N[%]. Dénommée ici « f », la fonction numérique comprend d'abord les « n » variable(s) entre crochets (par exemple,  $[x_1, x_2, x_i, \dots, x_n]$ ) puis la suite des intervalles de définition entre accolades. Chaque intervalle de définition « i » comprenant successivement la variable «  $x_i$  », sa borne inférieure «  $a_i$  », sa borne supérieure «  $b_i$  » et éventuellement son pas de calcul « pas<sub>i</sub> » (1), la fonction numérique s'écrit, dans le cas général, sous la forme

$$f[[x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n], \{x_1, a_1, b_1, \text{pas}_1\}, \dots, \{x_i, a_i, b_i, \text{pas}_i\}, \dots, \{x_n, a_n, b_n, \text{pas}_n\}]$$

Prédéfinies par « Mathematica » ou définies par l'utilisateur, toutes les fonctions mathématiques, simples ou complexes, suivent ces règles.

### 1) *L'utilisation de fonctions prédéfinies*

A l'image des constantes prédéfinies, les fonctions prédéfinies sont toutes munies d'un nom significatif commençant obligatoirement par une majuscule et sont définies le plus souvent avec une seule variable ( $n=1$  et  $x_n=x_1=x$ ). Dans cette liste figurent des fonctions simples permettant de calculer l'arrondi le plus proche (Round[x]), la valeur absolue (Abs[x]), la racine carrée (Sqrt[x]), l'exponentiel (Exp[x]), le logarithme népérien (Log[x]) de la variable x. Les fonctions trigonométriques Sinus, Cosinus et Tangente (respectivement Sin[x], Cos[x], Tan[x]), les fonctions trigonométriques inverses (respectivement ArcSin[x], ArcCos[x] et ArcTan[x]) et les fonctions Sinus hyperbolique, Cosinus hyperbolique et Tangente hyperbolique (respectivement Sinh[x], Cosh[x], Tanh[x]) font également partie de cette liste comme les fonctions prédéfinies Re[x], Im[x], Arg[x] qui permettent d'obtenir successivement la partie réelle, la partie imaginaire et l'argument du nombre complexe  $x=a+I.b$  (2).

---

<sup>1</sup> Si le pas de calcul désiré est égal au pas par défaut propre à la fonction, il n'est pas alors obligatoire (pour connaître le pas par défaut, il suffit de taper la commande ?? suivie du nom de la fonction).

<sup>2</sup> La signification de chaque fonction préétablie est donnée par le logiciel « Mathematica » sous forme simple ou développée en tapant respectivement un point d'interrogation suivi du nom de la fonction ou deux points d'interrogation suivis du nom de la fonction (par exemple, ??Sin).

Comme l'illustre la copie d'écran ci-dessous, vous pouvez calculer, grâce à « Mathematica », la valeur arrondie la plus proche de 48,78 <sup>(3)</sup>, la valeur absolue de -76, la racine carrée de  $2 \cdot x^2$  puis sa valeur approximative avant de déterminer l'exponentiel au cube ou le logarithme népérien de E. Les calculs de  $\sin[3 \cdot \pi]$ , de  $\cos[\pi]$ , de  $\text{tg}[3 \cdot \pi/4]$  ne posent ici guère plus de problème. Et il en va de même quand vous cherchez la partie réelle ou la partie imaginaire du nombre complexe  $5+3 \cdot I$  ou encore l'argument de  $3+\pi \cdot I/2$ .

Telnet – moliere.u-paris10.fr VT		
Connexion	Edition	Terminal
In[13]	:=	Round[48.78]
Out[13]	=	49
In[14]	:=	Abs[-76]
Out[14]	=	76
In[15]	:=	Sqrt[2*(x^2)]
Out[15]	=	Sqrt[2] Sqrt[x^2]
In[16]	:=	N[Sqrt[2*(x^2)]]
Out[16]	=	1.414213 Sqrt[x^2]
In[17]	:=	Exp[3]
Out[17]	=	E[3]
In[18]	:=	N[Exp[3]]
Out[18]	=	20.0855
In[19]	:=	Log[E]
Out[19]	=	1
In[20]	:=	Sin[3 * Pi]
Out[20]	=	0
In[21]	:=	Cos[Pi]
Out[21]	=	-1
In[22]	:=	Tan[3 * Pi /4]
Out[22]	=	-1
In[23]	:=	Re[5 + 3*I]
Out[23]	=	5
In[24]	:=	Im[5 + 3*I]
Out[24]	=	3
In[25]	:=	Arg[ 3 + ( I * Pi/2 ) ]
Out[25]	=	ArcTan [ $\frac{\text{Pi}}{6}$ ]

Grâce à la commande « Plot », toutes ces fonctions courantes peuvent être dessinées graphiquement dans un espace à deux dimensions. En suivant le modèle ci-après, la fonction univoque  $f[x]$  est tracée avec, entre accolades, la plage de la variable « x » comprise entre la borne inférieure « a » et la borne supérieure « b ».

Plot[ f[x], {x,a,b} ]

<sup>3</sup> Comme dans de nombreux logiciels scientifiques, la virgule, séparant normalement en français les entiers des décimales, est remplacée dans « Mathematica » par un point.

En observant fidèlement cette syntaxe, vous pouvez, par exemple, dessiner la courbe sinusoïdale  $f[x]=\text{Sin}[x]$  dans un intervalle de définition de la variable « x » compris entre  $a=0$  et  $b=20$  comme l'indique la ligne d'entrée n°26 ci-dessous. « Mathematica » signale la réussite de l'opération en affichant parallèlement, sur la ligne de sortie, l'expression « Graphics » et, à l'écran, le graphique demandé (4).

Les fonctions à deux variables, dénommées ici «  $x_1$  » et «  $x_2$  », peuvent être dessinées dans un espace à deux dimensions à l'aide de la commande « Plot » ou dans un espace à trois dimensions à l'aide de la commande « Plot3D ». Dans une représentation à trois dimensions, la commande « Plot3D » est suivie de la fonction  $f[x_1,x_2]$  avec une plage de la variable «  $x_1$  » comprise entre les bornes  $a_1$  et  $b_1$  entre accolades et une plage de la variable «  $x_2$  » comprise entre les bornes  $a_2$  et  $b_2$  entre accolades.

$$\text{Plot3D}[f[x_1,x_2], \{x_1, a_1, b_1\}, \{x_1, a_2, b_2\}]$$

En suivant cette syntaxe, vous pouvez dessiner la fonction sinusoïdale  $f[x_1,x_2]=\text{Sin}[x_1.x_2]$  avec «  $x_1$  » et «  $x_2$  » compris respectivement entre  $a_1=0$  et  $b_1=10$  et  $a_2=0$  et  $b_2=5$  comme le montre la ligne d'entrée n°27 ci-dessous. « Mathematica » indique que l'opération projetée s'est bien déroulée en affichant parallèlement, sur la ligne de sortie, l'expression « SurfaceGraphics » et, à l'écran, le graphique demandé (5).

Telnet – moliere.u-paris10.fr VT		
Connexion	Edition	Terminal
<b>In[26]</b>	<code>:= Plot[Sin[x],{x,0,20}]</code>	
<b>Out[26]</b>	<code>= ----- Graphics -----</code>	
<b>In[27]</b>	<code>:= Plot3D[Sin[x1 * x2],{x1,0,10},{x2,0,5}]</code>	
<b>Out[27]</b>	<code>= ----- SurfaceGraphics -----</code>	

## 2) La définition par l'utilisateur de ses propres constantes et de ses propres fonctions

En utilisant le vocabulaire de base « Mathematica », l'utilisateur peut définir ses propres constantes et ses propres fonctions. Chaque constante est définie sous la forme d'une égalité comme l'illustre la ligne d'entrée n°28 de la copie d'écran figurant à la page suivante. Sur une ligne d'entrée donnée, il suffit d'inscrire, dans le membre de gauche de l'égalité, le nom symbolique de la constante, le signe d'égalité « = » puis, dans le membre de droite de l'égalité, d'apposer la valeur numérique associée à la constante.

Chaque fonction est définie d'une manière similaire comme l'indique la ligne d'entrée n°29 ci-après. Sur une ligne d'entrée donnée, il suffit d'inscrire, dans le membre de gauche, le nom symbolique de la fonction avec, entre crochets, ses variables  $x_i$  suivies chacune du caractère souligné « \_ » (6), de taper ensuite le signe d'attribution « := » puis, dans le membre de droite, d'inscrire le contenu de la fonction.

<sup>4</sup> A ce stade, le graphique peut être sauvegardé en utilisant le menu « File » de la fenêtre « File Selector ».

<sup>5</sup> A ce stade, le graphique peut être sauvegardé en utilisant le menu « File » de la fenêtre « File Selector ».

<sup>6</sup> Le caractère « \_ » indique que le caractère précédant le signe est une variable (par exemple, x est une variable dans l'expression `:= f[x_] = x`).

Contrairement à la définition de la constante effectuée avec le signe d'égalité « = », la définition de la fonction réalisée avec le signe d'attribution « := » n'engendre aucune réponse de la part de « Mathematica » : aucune ligne de sortie n'apparaît à l'écran avec le même numéro d'opération.

Pour savoir si la fonction ne contient aucune erreur, il est nécessaire de taper sur la ligne d'entrée suivante le nom symbolique de la fonction avec, entre crochets, sa (ses) variable(s) sans caractère(s) souligné(s) « \_ ». La ligne de sortie correspondante affiche alors la fonction définie (en cas de polynôme, les facteurs polynomiaux sont rangés par ordre croissant à l'image de la ligne de sortie n°30 ci-dessous). La fonction vérifiée de visu, celle-ci peut être tracée graphiquement à l'aide de la commande « Plot » à la ligne d'opération suivante ou estimée en un point en remplaçant la variable « x » par une valeur numérique à l'image de la ligne d'opération n°32.

Telnet – moliere.u-paris10.fr VT		
Connexion	Edition	Terminal
In[28]	:	$c=8$
Out[28]	=	8
In[29]	:	$f[x_] := x^6 + x^2 + 4$
In[30]	:	$f[x]$
Out[30]	=	$4 + x^2 + x^6$
In[31]	:	$Plot[f[x], \{x, -5, +5\}]$
Out[31]	=	----- Graphics -----
In[32]	:	$f[6] + c$
Out[32]	=	46704
In[33]	:	$Clear[c, f[x]]$

Les constantes et les fonctions précisées par l'utilisateur étant automatiquement mémorisées par « Mathematica », seules la commande d'effacement « Clear » ci-dessus <sup>(7)</sup> ou les commandes de sortie du logiciel, « Quit » ou « ! », permettent de supprimer les définitions précédentes.

<sup>7</sup> La demande d'effacement « Clear » n'étant pas une question, aucune ligne de sortie n'apparaît ici à l'écran.