

Le formulaire, les tables statistiques et la calculatrice sont autorisés. Tout autre document est interdit.

Exercice 1

Soit un n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) de loi d'espérance μ et de variance σ^2 .

- 1 Montrer que $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ est un estimateur sans biais de μ .
- 2 Montrer que $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ est un estimateur biaisé de σ^2 .
(Indication éventuelle : $\sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}_n$)
- 3 En déduire un estimateur sans biais de σ^2 .

Exercice 2

On considère un n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) de loi de densité

$$f_\theta(x) = \frac{x^2}{2\theta^3} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x)$$

avec $\theta > 0$ inconnu.

Il s'agit de la loi d'Erlang de paramètre $1/\theta$ et pour laquelle $k = 3$.

On cherche à estimer le paramètre θ à partir de cet échantillon.

On donne $E(X) = 3\theta$ et $var(X) = 3\theta^2$.

- 1) Proposer un estimateur sans biais de θ en expliquant votre choix.
- 2) Donner la fonction de vraisemblance de l'échantillon.
- 3) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ . On le notera T_n .
Est-il sans biais ?
Est-il convergent ?
Est-il efficace ?

4) Donner la loi asymptotique de $\sqrt{3n}(T_n - \theta)$ lorsque n tend vers l'infini en justifiant votre réponse.

Exercice 3

Pour revoir sa grille tarifaire, une mutuelle désire connaître la proportion de sa clientèle qui porte des lunettes. Sur les 780 personnes qu'elle interroge, 260 se déclarent porteuses de lunettes.

- 1) Donner une estimation ponctuelle de la proportion p d'individus disposant de lunettes.
- 2) Déterminer l'intervalle de confiance pour p au niveau de confiance 0,95 en justifiant les différentes étapes de sa construction.
- 3) On souhaite que la longueur de l'intervalle de confiance soit inférieure ou égale à 0,05. Quels niveaux de confiance le permettent ?
- 4) Au niveau de confiance 0,95, quelle taille minimale l'échantillon doit-il avoir pour que la longueur de l'intervalle de confiance soit inférieure ou égale à 0,05 ?