Epreuve intermédiaire de mai 2008.

– *L'utilisation de tout appareil électronique (calculatrice, téléphone,...) est formellement interdite.*
– *Durée : 3h.*

Exercice 1. Une entreprise de sous-traitance automobile produit 4 types de pièces en quantité x_1, x_2, x_3 et x_4 dans un atelier unique comprenant des équipements. La capacité hebdomadaire de production cumulée de tous ces équipements est de 50 heures (ou plus précisément 50 *heures machines*). Les cadences de production (en pièces/heure), marges unitaires (en €) et demandes hebdomadaires (en nombre de pièces) de chaque type de pièces sont spécifiées dans le tableau suivant :

	type 1	type 2	type 3	type 4
cadence	25	50	75	100
marge unitaire	10	8	4	5
demande	1000	1500	3000	3500

1. *Question préliminaire* : d'après le tableau, les pièces de type 1 sont produites à une cadence de 25 pièces à l'heure. Combien de temps d'utilisation des équipements (en heures) la fabrication d'une pièce de type 1 nécessite-t-elle ? En déduire la contrainte de production des équipements.
2. Ecrire le programme linéaire correspondant à la maximisation de la marge totale sous les contraintes envisagées :
   – la contrainte de production des équipements,
   – les contraintes de limitation de la production par les demandes respectives (que l'entreprise décide de ne pas nécessairement satisfaire, mais en tous les cas de ne pas excéder) : il y en a 4.
3. Quel est le rendement horaire (en terme de marge) de chaque type de pièces ? Expliquez, par un argument économique fondé sur le calcul des 4 rendements, pourquoi la solution optimale est $\hat{x}_1 = 0$, $\hat{x}_2 = 750$, $\hat{x}_3 = 0$, $\hat{x}_4 = 3500$.
4. Ecrire le programme sous forme standard $\left(\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = q\,X \\ s.l.c. \left\{ \begin{array}{r} B\,X = b \\ X \geq 0 \end{array} \right. & \end{array} \right)$. Quelle est la base I associée à l'optimum $\hat{X} = {}^t(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_9)$?
5. Ecrire le tableau de simplexe associé à I. En déduire, grâce à l'algorithme du simplexe, que l'optimum trouvé dans la question 3. est correct (<u>attention</u> : ne choisissez pas la base initiale n'importe comment...).
6. Ecrire les conditions d'optimalité et en déduire les prix duaux optimaux $\pi = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ correspondant dans l'ordre à la contrainte de production, puis à celles de limitation par les demandes respectives.
7. Interpréter économiquement les prix duaux u_i, $i = 1, \ldots, 5$.
8. Expliquer la valeur du prix dual u_1 correspondant à la contrainte de production par un argument économique (faisant intervenir à nouveau le rendement).
9. L'entreprise cherche à déterminer une meilleure stratégie de production. Le prix d'usage des équipements est de 350 € par heure. L'extension de la capacité de production b_1 des équipements est-elle profitable ? Argumentez !
10. Déterminer par un argument économique simple la valeur maximale b_1^* que peut prendre la capacité de production des équipements sans que la structure de production ne change.
11. Pour un vecteur de seconds membres b fixé, déterminer le vecteur d tel que $B^I d = b$. En déduire
    – le domaine de validité $\mathcal{V}_I(B)$de la base optimale I,
    – le sommet $X(b, I)$ de base I associé à $b \in \mathcal{V}_I(B)$.
    Retrouver ainsi la valeur de b_1^*.

12. Question supplémentaire : *Quelle est la nouvelle base lorsque la valeur de b_1 dépasse b_1^* ? Modifier (très peu) les conditions d'optimalité déjà écrites dans la question 6. pour déterminer le nouveau prix dual u_1. Une extension au-delà de b_1^* est-elle profitable ?*

Exercice 2. Une entreprise de denrées alimentaires se voit imposer par les nouvelles normes européennes d'introduire dans ses plats cuisinés une certaine teneur en vitamines A et C, et en fibres alimentaires. Aussi l'entreprise ajoute-t-elle deux aliments à la recette de ses plats : du chou blanc cru et des épinards en quantités respectives x_1 et x_2 (kg par marmitte). Le tableau suivant spécifie les teneurs correspondantes en vitamines et en fibres, ainsi que les normes exigées (dans la même unité).

	chou	épinards	quantité exigée par marmitte
vitamine A (en mg/kg)	$0,5$	$0,5$	$0,5$ mg
vitamine C (en mg/kg)	80	10	20 mg
fibres alimentaires (en g/kg)	4	20	10 g
Prix (en € /kg)	$0,5$	$0,2$	

1. L'entreprise cherche à satisfaire les nouvelles normes au moindre coût. Ecrire le programme linéaire correspondant.
2. Le résoudre graphiquement.
3. Quel est alors le nouvel optimum si le prix des épinards augmente et s'élève à $0,6$ € / kg ?
4. On revient au cas où les prix unitaires sont de $0,5$ et $0,2$ € /kg. Ecrire les conditions d'optimalité et en déduire le vecteur $\pi = (u_1, u_2, u_3)$ des prix duaux optimaux.
5. Interpréter économiquement les prix duaux. Les normes évoluent cette année. Quel est l'élément (vitamine ou fibres) dont l'augmentation de la quantité exigée influe le plus sur le coût minimal ?

Barème indicatif : exercice 1 (17 points) ; exercice 2 (8 points).