Polynômes et nombres complexes

Table des matières

1 Polynômes

Définition 1 (Polynôme)**.** Un polynôme à coefficients réels est une suite de nombres réels ayant un nombre fini de termes non nuls. L'indice du dernier terme non nul est appelé le degré du polynôme. La suite dont tous les termes sont nuls est appelée polynôme nul et son degré et $-\infty$. L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$.

Si $q \in \mathbb{N}$ est le degré du polynôme P, on note $q = \mathrm{d}^{\mathrm{o}}(P)$ et $P = (a_0, \ldots, a_q)$ où $a_q \neq 0$, nécessairement. On peut aussi noter P en utilisant l'indéterminée X de la façon suivante :

$$P = \sum_{i=0}^{q} a_i X^i = a_0 + a_1 X + \cdots + a_q X^q \ .$$

Un polynôme P de degré zéro est une suite dont seul le premier terme a_0 est non nul. Un tel polynôme est appelé polynôme constant, est identifié à son premier terme et on note $P = a_0$.

Addition des polynômes

Soit P et Q deux polynômes. Le polynôme $P+Q$ est le polynôme dont les coefficients sont les sommes terme à terme des coefficients de P et Q. Si $P=(a_0,\dots,a_p)$ et $Q=(b_0,\dots,b_q)$ avec $p \leq q$, alors

$$P+Q=\begin{cases}(a_0+b_0,\dots,a_p+b_p) & \text{si } p=q \ , \\ (a_0+b_0,\dots,a_p+b_p,b_{p+1},\dots,b_q) & \text{si } p<q \ .\end{cases}$$

En notation avec l'indeterminée, on a, si $p \leq q$,

$$P+Q=\sum_{i=0}^{p}(a_i+b_i)X^i+\sum_{i=p+1}^{q}b_iX^i$$

où la deuxième somme est nulle par convention si $p=q$.

Multiplication des polynômes

Soit $P=(a_0,\dots,a_p)$ et $Q=(b_0,\dots,b_q)$ deux polynômes. Le polynôme PQ est le polynôme dont les coefficients c_j sont définis par

$$c_j=\sum_{i=0}^{j}a_ib_{j-i} \ , \quad 0 \leq j \leq p+q$$

en posant $a_i=0$ si $i>p$ et $b_i=0$ si $i>q$. Le polynôme PQ est de degré $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(P)+\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(Q)$. Son terme de plus haut degré est $a_pb_qX^{p+q}$. Si on utilise l'indéterminée X, on écrit

$$PQ=\sum_{j=0}^{p+q}\left(\sum_{i=0}^{j}a_ib_{j-i}\right)X^j \ ,$$

toujours avec la convention $a_i=0$ si $i>p$ et $b_i=0$ si $i>q$. Notamment pour $j=p+q$, le seul terme de la somme est a_pb_q et est nécessairement non nul.

Exemple Soit $P=3X^2+X+1$ et $Q=X^3-X^2+2$. Alors

$$PQ=(3X^2+X+1)(X^3-X^2+2)=3X^5-2X^4+5X^2+2X+2 \ .$$

Multiplication par une constante Soit P un polynôme et soit Q un polynôme constant, $Q=c$, $c \in \mathbb{R}$. On notera cP le polynôme PQ, dont les coefficients sont les coefficients de P multipliés par c. Si $c \neq 0$, alors $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(cP)=\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(P)$. Si $c=0$ alors $cP=0$.

1.1 Division euclidienne

Théorème 1. *Soit A et B deux polynômes, $B \neq 0$. Il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tels que*

$$A=BQ+R \ , \quad \mathrm{d}^{\mathrm{o}}(R)<\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(B) \ .$$

Remarques

- L'unicité du couple (Q, R) est garantie par la condition $d^o(R) < d^o(B)$.
- Si le reste de la division euclidienne de A par B est nul, on dit que B divise A, ou que B est un diviseur de A ou que A est un multiple de B.
- Les constantes non nulles divisent tous les polynômes.

Exemples

Division euclidienne de $X^4 + X^2 + 1$ par $X^2 + 1$.

$$X^4 + X^2 + 1 = X^2(X^2 + 1) + 1 \; .$$

Division euclidienne de $X^4 + X^2 + 1$ par $X^2 + X + 1$.

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) \; .$$

On obtient donc que $X^2 + X + 1$ et $X^2 - X + 1$ divisent $X^4 + X^2 + 1$.

Définition 2 (Polynôme irréductible)**.** Un polynôme P est dit irréductible si ses seuls diviseurs sont les constantes et ses multiples constants cP, $c \in \mathbb{R}$.

Proposition 1. *Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.*

1.2 Fonction polynôme

Définition 3 (Fonction polynôme)**.** Soit P un polynôme à coefficients réels, $P = (a_0, \ldots, a_q)$. On appelle fonction polynôme associée à P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \to \sum_{i=0}^{q} q_i x^i \; .$$

Par abus de notation, on note encore P cette fonction, et sa valeur en x est notée $P(x)$.

Remarque Il faut bien faire la différence entre l'expression $a_0 + a_1 X + \cdots + a_q X^q$, qui est un polynôme, élément de l'ensemble $\mathbb{R}[X]$, et, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, le nombre réel $a_0 + a_1 x + \cdots + a_q x^q$, obtenu comme l'évaluation de la fonction polynôme associée P en x. Ce sont deux objets mathématiques de natures absolument différentes.

Définition 4 (Racine d'un polynôme)**.** Soit P un polynôme. Le nombre réel λ est appelé racine de P si la fonction polynôme associée à P s'annule en λ.

Proposition 2. *Soit P un polynôme. Le nombre réel λ est une racine de P si et seulement si $X - \lambda$ divise P.*

On obtient comme conséquence immédiate de ce résultat que si P est de degré 2, P est irréductible si et seulement si P n'admet pas de racines réelles. Rappelons qu'un polynôme de degré 2 $aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$ admet des racines si et seulement si $b^2 - 4ac > 0$, et se factorise alors de la façon suivante

$$aX^2 + bX + c = a\left(X - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(X - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) .$$

Théorème 2. *Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racines réelles.*

Définition 5 (Racine multiple)**.** Soit P un polynôme. Le réel λ est une racine de multiplicité (exactement) m si $(X - \lambda)^m$ divise P et $(X - \lambda)^{m+1}$ ne divise pas P.

1.3 Décomposition en facteurs irréductibles

Théorème 3. *Tout polynôme non nul P peut s'écrire de façon unique comme un produit de puissances de polynômes irréductibles :*

$$P = a \prod_{i=1}^{q} (X - \lambda_i)^{q_i} \prod_{i=1}^{p} (X^2 + b_i X + c_i)^{p_i} ,$$

où

- $a \neq 0$ *;*
- *les nombres réels λ_i sont deux à deux distincts et les nombres q_i sont des entiers non nuls appelés multiplicités respectives des racines λ_i ;*
- *les couples de réels (b_i, c_i) sont deux à deux distincts et tels que $b_i^2 - 4c_i < 0$; les nombres p_i sont des entiers non nuls.*

Exemple On a déjà vu que l'on peut factoriser $X^4 + X^2 + 1$ de la facçon suivante :

$$X^4 + X + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) .$$

Or $X^2 + X + 1$ et $X^2 - X + 1$ n'ont pas de racines réelles donc sont irréductibles, donc on a bien obtenu la décomposition en facteurs irréductibles de $X^4 + X^2 + 1$.

Corollaire 1. *Soit P un polynôme admettant n racines disctinctes. Alors* $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}P \geq n$.

Corollaire 2. *Soit P un polynôme de degré au plus n tel que la fonction polynôme associée à P s'annule en $n + 1$ nombres réels distincts. Alors P est le polynôme nul.*

Ce résultat peut être utilisé de la façon suivante. Si P et Q sont deux polynômes de degré au plus n, et telle que les fonctions polynômiales associées coïncident en $n+1$ nombres réels disctints, alors $P = Q$. Nous donnons deux applications de ce résultat très utile.

Exemple Soit P un polynôme quelconque. Grâce au résultat précédent, on peut identifier le reste de la division euclidienne de P par X^2-1 sans avoir besoin de l'effectuer. Soit Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par X^2-1, i.e. $P=(X^2-1)Q+R$, avec $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(R)\leq 1$. Puisque -1 et 1 sont les racines de X^2-1, si l'on évalue P en -1 et 1, on obtient

$$P(1)=R(1)\ , \quad P(-1)=R(-1)\ .$$

Soit $S=aX+b$ un poylnôme de degré au plus 1 qui coïncide avec P en 1 et -1. On a alors

$$a+b=P(1)\ , \quad -a+b=P(-1)\ ,$$

d'où

$$a=\frac{P(1)-P(-1)}{2}\ , \quad b=\frac{P(1)+P(-1)}{2}\ .$$

Le polynôme S ainsi défini coïncide avec R en 1 et -1, R et S sont de degré au plus 1, donc $R=S$. On a donc identifié le reste de la division euclidienne de P par X^2-1, sans connaître P explicitement.

Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $x_1,\dots,x_n$ n nombres réels deux-à-deux distincts et soit $y_1,\dots,y_n$ n nombres réels. On peut toujours supposer que les x_i sont ordonnés, i.e. $x_1<\dots<x_n$. Le problème de l'interpolation consiste à trouver une fonction f définie au moins sur l'intervalle $[x_1,x_n]$ telle que $f(x_i)=y_i$. On peut considérer plusieurs méthode, chacune ayant sa justification et ses limitations propres. Nous considérons ici le problème de l'interpolation polynômiale.

Théorème 4. *Soit $x_1,\dots,x_n$ n nombres réels deux-à-deux distincts et soit $y_1,\dots,y_n$ n nombres réels. Il existe un unique polynôme de degré au plus $n-1$ tel que la fonction polynôme associée à P prenne la valeur y_i en x_i, soit avec un abus de notation, $P(x_i)=y_i$.*

Démonstration. Il s'agit d'un résultat d'existence et d'unicité. Nous allons prouver l'existence en exhibant un tel polynôme, et l'unicité en utilisant le Corollaire 2. Pour $j=1,\dots,n$, soit Q_j le polynôme défini par

$$Q_j=\frac{y_j}{\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)}\prod_{i\neq j}(X-x_i)\ .$$

Chaque polynôme Q_j vérifie $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}Q=n-1$ si $y_j\neq 0$ et $Q_j=0$ si $y_j=0$, $Q_j(x_i)=0$ si $i\neq j$ et $Q_j(x_j)=y_j$. Soit maintenant P le polynôme défini par

$$P=\sum_{j=1}^{n}Q_j=\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)}\prod_{i\neq j}(X-x_i)\ .$$

Alors $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(P)\leq n-1$ et $P(x_j)=y_j$ pour tout $j=1,\dots,n$. Prouvons maintenant l'unicité. Soit Q un polynôme de degré au plus $n-1$ tel que $Q(x_j)=y_j$, $1\leq j\leq n$. Alors P et Q sont de degré au plus $n-1$ et coïncident en n nombres réels distincts, donc sont égaux par le corollaire 2. □

Remarque Cette méthode est en pratique une très mauvaise méthode d'interpolation. Son intérêt est essentiellement théorique.

Polynômes premiers entre eux

Définition 6 (Polynômes premiers entre eux)**.** Deux polynômes sont dits premiers entre eux si leurs décomposition en facteurs irréductibles n'admet aucun facteur commun.

Exemple 1.1. Les polynômes $X^4 - 2X^2 + 1$ et $X^4 + 2X^2 + 1$ sont premiers entre eux.

Proposition 3.
- *Si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux divisant le même polynôme R, alors PQ divise R.*
- *Deux polynômes premiers entre eux n'ont pas de racines communes.*

Théorème 5 (Bézout)**.** *Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux. Il existe alors des polynômes A et B tels que $AP + BQ = 1$. On peut de plus choisir de façon unique A et B tels que* $\mathrm{d}^{\circ}(A) < \mathrm{d}^{\circ}(Q)$ *et* $\mathrm{d}^{\circ}(B) < \mathrm{d}^{\circ}(P)$.

Corollaire 3. *Soit P et Q des polynômes premiers entre eux. Pour tout polynôme R, il existe des polynômes U et V tels que $R = UP + VQ$.*

1.4 Polynôme dérivée

Soit P un polynôme, $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_q X^q$. On appelle polynôme dérivée de P le polynôme, noté P', défini par

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \cdots + q a_q X^{q-1} = \sum_{j=0}^{q} j a_j X^{j-1} .$$

On définit les polynômes dérivés d'ordre supérieur par récurence : $P^{(n)} = (P^{(n-1)})'$.

Proposition 4.
- *La fonction polynôme associée au polynôme dérivé de P est la dérivée de la fonction polynôme associée à P.*
- *$P^{(n)} = 0$ si et seulement* $\mathrm{d}^{\circ}(P) \leq n - 1$.
- *λ est une racine de multiplicité exactement m du polynôme P si et seulement si λ est une racine de $P^{(m)}$ mais n'est pas une racine de $P^{(m+1)}$.*

On a vu que l'on peut identifier un polynôme de degré n par ses valeurs en $n+1$ points. On peut aussi identifier un polynôme de degré n par les valeurs de ses dérivées successives en un point fixe a.

Proposition 5. *Soit P un polynôme de degré au plus n. Soit a un nombre réel tel que $P(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$. Alors $P = 0$.*

Démonstration. Supposons que $d^o(P) \leq 0$. Alors $P = a_0$ et $P(a) = 0$ implique $a_0 = 0$, d'où $P = 0$. Procédons maintenant par récurrence. Supposons que pour un nombre entier $n \geq 1$, on ait prouvé que tout polynôme de degré au plus $n-1$ dont les dérivées successives s'annulent en un même point soit nul. Soit maintenant P un polynôme de degré au plus n, $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, tel que P et toutes ses dérivées successives s'annulent en a. Puisque $P^{(n)}$ est le polynôme constant $n!a_n$, si $P^{(n)}(a) = 0$, on a nécessairement $a_n = 0$, et donc P est de degré au plus $n-1$. On peut donc applique l'hypothèse de récurrence à P, et l'on obtient $P = 0$. □

Comme précédemment, on peut écrire ce résultat sous une form équivalente. si P et Q sont deux polynômes de degrés au plus n et a est un nombre réel tel que $P(a) = Q(a)$ et $P^{(k)}(a) = Q^{(k)}(a)$ pour $k = 1, \ldots, n$. Alors $P = Q$. On obtient alors le corollaire suivant très important.

Corollaire 4. *Soit P un polynôme et a un nombre réel. Soit $P^{(k)}(a)$, $1 \leq k \leq n$ les valeurs des dérivées successives de la fonction polynômiale associée à P. Alors*

$$P = P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \ .$$

On utilise en général la convention $P^{(0)} = P$ et l'on écrit alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \ .$$

1.5 Exercices

Exercice 1.1. Trouver tous les polynômes P de degré inférieur ou égal à 3 tels que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = -1$ et $P(3) = -2$.

Exercice 1.2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tels que

$$P(X+1) - P(X-1) = X^2 + 1 \ .$$

Exercice 1.3. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^4 - 1, \quad B = X + 2,$
2. $A = X^4 + X^3 - X^2 + X + 1, \quad B = X^2 - X + 1,$
3. $A = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2, \quad B = X^2 + X + 1.$

Exercice 1.4. Déterminer sans calculs le reste de la division euclidienne de $(\cos a + X \sin a)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 1.5. Le polynôme $X^4 + 4$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 1.6. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^6 + 1$.

Exercice 1.7. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^4 - 2X^2\cos(\theta) + 1$.

Exercice 1.8. Soit $a \neq b$. Si les restes des divisions euclidiennes d'un polynôme A par $X-a$ et par $X-b$ sont α et β, respectivement, quel est le reste de la division de A par $(X-a)(X-b)$?

Exercice 1.9. Montrer que si $n \geq 2$ $(1-X^n)(1+X) - 2nX^n(1-X) - n^2X^n(1-X)^2$ est divisible par $(1-X)^3$.

Exercice 1.10. Déterminer a et b pour que $aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette la racine double 1. Quel est alors le quotient de $aX^{n+1} + bX^n + 1$ par $(X-1)^2$?

Exercice 1.11. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ n'ayant pas de racine réelle. On suppose que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

2 Nombres complexes

On a vu que certains polynômes sont irréductibles dans $\mathbb{R}$, ce qui est équivalent à dire qu'ils n'admettent pas de racines réelles. De même que certains polynômes à coefficients rationels n'ont pas de racines rationelles, mais ont des racines réelles, peut-on construire un ensemble contenant $\mathbb{R}$, auquel on pourrait étendre l'addition et la multiplication, et dans lequel les polynômes du second degré ne seraient pas irréductibles ? Et quel serait l'intérêt d'une telle construction ? C'est l'objet de cette section de définir les nombres complexes et de montrer leur utilité. Il existe plusieurs constructions, à partir d'idées algébriques ou géométriques, mais l'étude des propriétés des nombres complexes repose toujours en fin de compte sur les propriétés fondamentales topologiques de la droite réelle. Nous choisissons une approche algébrique, puis nous montrerons les propriétés géométriques des nombres complexes.

Soit $\sim$ la relation défine sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ par

$$P \sim Q \Leftrightarrow X^2 + 1 \text{ divise } P - Q\ .$$

Cette relation est appelée relation d'équivalence, car elle a les propriétés suvantes.

- Réflexivité : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P \sim P$. En effet, $P - P = 0$, donc $X^2 + 1$ divise $P - P$.
- Symétrie. Il est clair par la définition que $P \sim Q \Leftrightarrow Q \sim P$.
- Transitivité. Si $P \sim Q$ et $Q \sim R$, alors $P \sim R$. En effet, si $X^2 + 1$ divise $P - Q$ et $Q - R$, alors $X^2 + 1$ divise $P - Q + Q - R$, et $P - Q + Q - R = P - R$.

Cette relation est de plus compatible avec les opérations sur les polynômes.

Proposition 6. *Si $P \sim P'$ et $Q \sim Q'$ alors $P + P' \sim Q + Q'$ et $PP' \sim QQ'$.*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La classe d'équivalence de P, notée $\mathcal{C}(P)$ est le sous ensemble de $\mathbb{R}[X]$ constitué de tous les polynômes Q tels que $P \sim Q$. En particulier, P est dans sa propre classe d'équivalence. Si P et Q sont dans la classe d'équivalence d'un même polynôme R, alors par transitivité, $P \sim Q$. Ceci entraîne que deux classes d'équivalences sont disjointes ou égales, i.e. si $\mathcal{C}(P) \cap \mathcal{C}(Q) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(Q)$. Les classes d'équivalences pour la relation $\sim$ forment donc une partition de $\mathbb{R}[X]$.

Remarquons maintenant que l'on peut choisir un représentant particulier dans chaque classe d'équivalence, qui est le reste de la division euclidienne par $X^2 + 1$ d'un polynôme quelconque de la classe.

Proposition 7. *Soit $\mathcal{C}$ une classe d'équivalence pour la relation $\sim$. Il existe un unique polynôme de degré 1 appartenant à la classe. C'est le reste de la division euclidienne par $X^2 + 1$ de n'importe quel élément de la classe.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ une classe d'équivalence et $P \in \mathcal{C}$. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$. Par définition, $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(R) \leq 1$ et il existe un polynôme Q tel que $P = Q(X^2 + 1) + R$. Soit maintenant $P' \in \mathcal{C}$. Alors $X^2 + 1$ divise $P - P'$, i.e. il existe un polynôme S, éventuellement nul, tel que $P - P' = (X^2 + 1)$. On a donc $P' = P' - P + P = S(X^2 + 1) + Q(X^2 + 1) + R$, et donc R est aussi le reste de la division euclidienne de P' par $X^2 + 1$. L'unicité suit. □

Il est maintenant possible de définir l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, et l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$.

Définition 7. L'ensemble $\mathbb{C}$ est l'ensemble des classes d'équivalences pour la relation $\sim$. Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés nombres complexes. Soit z, z' deux nombres complexes, et soit P, P' des polynômes dont les classes d'équivalences sont z et z', respectivement.

- Le nombre complexe $z + z'$ est la classe d'équivalence de $P + P'$, qui ne dépend pas du choix particulier de P et P'.
- Le nombre complexe zz' est la classe d'équivalence de PP', qui ne dépend pas du choix particulier de P et P'.

Le fait que $z + z'$ et zz' ne dépendent pas du choix de P et P' est une conséquence de la proposition 6. Considérons maintenant les représentants de degré 1 de z et z', soit $a + bX$ et $a' + b'X$.

- Le représentant de degré 1 de $z + z'$ est $a + a' + (b + b')X$.
- le représentant de degré 1 de zz' est $aa' - bb' + (ab' + a'b)X$.

La première propriété est évidente. Pour vérifier la seconde, il faut effectuer la division euclidienne de $(a + bX)(a' + b'X)$ par $X^2 + 1$. On a

$$(a + bX)(a' + b'X) = bb'(X^2 + 1) + (ab' + a'b)X + aa' - bb' \ .$$

Le reste de la division euclidienne de $(a + bX)(a' + b'X)$ par $X^2 + 1$ est donc $(ab' + a'b)X + aa' - bb'$, qui est donc le représentant de degré 1 de zz'.

L'ensemble $\mathbb{C}$ peut donc être identifié à $\mathbb{R}^2$ muni des opérations suivantes

$$(a, b) + (a'b') = (a + a', b + b') \ , \quad (a, b) \cdot (a'b') = (aa' - bb', ab' - a'b) \ .$$

L'ensemble $\mathbb{R}$ peut alors être identifié au sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ formé des couples de la forme $(a, 0)$, et on notera $a(a', b')$ le produit $(a, 0) \cdot (a', a')$. Tout nombre complexe (a, b) peut donc être écrit sous la forme

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) .$$

La multiplication définie plus haut entraîne la relation fondamentale suivante

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = -1 .$$

Pour parvenir à l'écriture usuelle des nombres complexes, on va introduire la notation $\mathrm{i} = (0, 1)$ et comme on a déjà identifié le nombre complexe $(1, 0)$ avec le nombre réel 1, on peut alors écrire tout nombre complexe z sous la forme

$$z = a + \mathrm{i}b .$$

L'identité $(0, 1) \cdot (0, 1) = -1$ prend maintenant la forme célèbre

$$\mathrm{i}^2 = -1 .$$

Les nombres complexes de la forme $(a, 0)$ sont identifié aux nombres réels, et les nombres de la forme $(0, b)$ ou $\mathrm{i}b$ sont appelés imaginaires purs.

L'ensemble $\mathbb{C}$ à la même structure algébrique que $\mathbb{R}$: c'est un corps. Notamment, tout nombre complexe non nul admet un inverse pour la multiplication. Soit $z = a + \mathrm{i}b$ avec $ab \neq 0$. Alors

$$(a + \mathrm{i}b) \times \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\, \frac{b}{a^2 + b^2} \right) = 1 .$$

Définition 8 (Partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module)**.** Soit z un nombre complexe, $z = a + \mathrm{i}b$. Le nombre réel a est appelé partie réelle de z et noté $\mathrm{Re}(z)$. Le nombre réel b est appelé partie imaginaire de z, et noté $\mathrm{Im}(z)$. Le conjugé de z, noté $\bar{z}$, est le nombre complexe $a - \mathrm{i}b$ et le module de z, noté $|z|$, est le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}}$.

L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$ avec a, b réels est unique, et appelée représentation cartésienne du nombre complexe z. Cette unicité signifie que deux nombres réels z et z' sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires le sont :

$$z = z' \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') .$$

En particulier,

$$z = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0 .$$

On obtient aisément les identités suivantes

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} , \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2} .$$

On en déduit immédiatement qu'un nombre complexe est réel si et seulement si il est égal à son conjugué, et imaginaire pur si et seulement si il est égal à l'opposé de son conjugué.

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} , \quad z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z} .$$

Exemple Soit a, a', b, b' des nombres réels et soit $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$. Si $z' \neq 0$, déterminons les parties réelle et imaginaire de la fraction z/z'.

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z}'}{z'\bar{z}'} = \frac{aa' + bb' + \mathrm{i}(a'b - ab')}{a'^2 + b'^2} \,.$$

On a donc

$$\mathrm{Re}(z/z') = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} \,, \quad \mathrm{Im}(z/z') = \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2} \,.$$

Proposition 8. *Soit $z, z' \in \mathbb{C}$.*

$$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}' \,, \overline{z^n} = \bar{z}^n \,, \ |zz'| = |z||z'| \,, \ |z^n| = |z|^n \,.$$

Si $z' \neq 0$,

$$\overline{(z/z')} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \,, \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \,.$$

Polynômes à coefficients complexes

Définition 9 (Polynôme à coefficients complexes)**.** Un polynôme à coefficients complexes est une suite de nombres complexes ayant un nombre fini de termes non nuls. L'indice du dernier terme non nul est appelé le degré du polynôme. La suite dont tous les termes sont nuls est appelée polynôme nul et son degré est $-\infty$. L'ensemble des polynômes à coefficients complexes est noté $\mathbb{C}[X]$.

A un polynôme à coefficients complexes, on peut associer une fonction polynômiale comme dans le cas des coefficients réels.

Définition 10 (Fonction polynôme)**.** Soit P un polynôme à coefficients complexes, $P = (a_0, \ldots, a_q)$. On appelle fonction polynôme associée à P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \to \sum_{i=0}^{q} q_i x^i \,.$$

Par abus de notation, on note encore P cette fonction, et sa valeur en x est notée $P(x)$. Une racine complexe d'un polynôme P est un nombre complexe z tel que $P(z) = 0$.

Par exemple, nous savons maintenant que le nombre complexe i est une racine complexe du polynôme $X^2 + 1$ puisque $\mathrm{i}^2 = -1$. Le polynôme $X^2 + 1$ est donc factorisable dans $\mathbb{C}$: $X^2 + 1 = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$. Ce polynôme qui est irréductible dans $\mathbb{R}$ ne l'est plus dans $\mathbb{C}$. C'est en fait vrai de tous les polynômes de degré 2 irréductibles dans $\mathbb{R}$.

Théorème 6 (D'Alembert-Gauss)**.** *Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*

Corollaire 5. *Tout polynôme de degré n a coefficients complexes admet n racines (non nécessairement toutes distinctes).*

Théorème 7. *Les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels sont deux à deux conjuguées.*

Dérivée d'un polynôme à coefficients complexes

On peut dériver formellement les polynômes à coefficients complexes de la même façon que les polynômes à coefficients réels. Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, où les coefficients a_i sont complexes, alors on définit à nouveau le polynôme dérivée P' de P par

$$P' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} X^i \ .$$

Exponentielle complexe, sinus, cosinus, π

Considérons maintenant l'ensemble $\mathbb{S}^1$ des nombres complexes de module 1, i.e. l'ensemble des nombres complexes z tels que $(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2 = 1$. Cet ensemble est identifiable à cercle unité du plan $\mathbb{R}^2$. Pour définir l'exponentielle complexe, nous allons donner une définition rigoureuse du nombre réel π et de la fonction cosinus.

Définition 11 (Le nombre π)**.** Le nombre réel π est la longueur du demi-cercle, définie par

$$\pi = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

Nous allons maintenant définir pour $x \in [-1, 1]$ la fonction $\arccos(x)$ (arc-cosinus) comme la longueur de l'arc de cercle compris entre le point $(0, 1)$ et le point du cercle d'abcisse x. Cf. Figure 1.

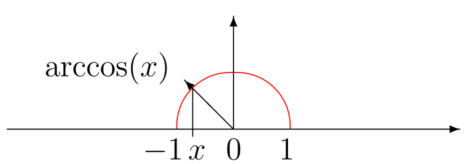

FIGURE 1 – Le demi-cercle unité, la fonction arc-cosinus

Définition 12 (Cosinus, sinus, exponentielle complexe)**.**

- La fonction arc-cosinus notée arccos est la fonction continue strictement décroissante définie sur $[-1, 1]$ par

$$\arccos(x) = -\int_{x}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \ .$$

- La fonction cos (cosinus) est la réciproque de arccos sur $[0, \pi]$. La fonction sin (sinus) est la fonction défine sur $[0, \pi]$ par $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$. On prolonge à $\mathbb{R}$ la fonction cos par parité et 2π périodicité, et la fonction sin par imparité et 2π-périodicité.

La fonction qui a $\theta \in [0, \pi]$ associe le nombre complexe du demi-cercle unité $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ est une bijection de $[0, \pi]$ sur le demi-cercle. Son extension à $\mathbb{R}$ n'est pas bijective mais conserve la propriété

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \ , \quad \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \ .$$

Elle a de plus la propriété fondamentale suivante.

Théorème 8. *Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$.*

On dit que l'exponentielle complexe est un morphisme du groupe additif de $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$.

Preuve du Théorème 8. Il suffit de prouver la propriété pour $\theta, \theta' \in [0, \pi]$ tels que $\theta + \theta' \in [0, \pi]$, et pour cela il suffit de prouver que si z, z' et zz' sont sur le demi-cercle unité supérieur, alors $\arccos(\mathrm{Re}(zz')) = \arccos(\mathrm{Re}(z)) + \arccos(\mathrm{Re}(z'))$. Si l'on note $x = \mathrm{Re}(x)$ et $x = \mathrm{Re}(x)$, alors il faut montrer

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} + \int_{x'}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{xx'-\sqrt{(1-x^2)(1-x'^2)}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \ .$$

Fixons x' et notons $g(x)$ le membre de droite. Pour $x = 1$, on a bien l'égalité des deux membres. Il suffit donc de montrer que l'on a égalité des dérivées par rapport à x des deux membres. En appliquant la formule des dérivées composées, on obtient

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (xx' - \sqrt{(1-x^2)(1-x'^2)})^2}} \times \left\{ x' + \frac{x\sqrt{1-x'^2}}{\sqrt{1-x^2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ,$$

ce qui conclut la preuve. □

Quelques valeurs remarquables

$$\mathrm{e}^0 = 1 \ , \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i} \ , \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1 \ , \quad \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i} \ , \quad \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1 \ .$$

Théorème 9. *La fonction exponentielle est périodique de période $2\mathrm{i}\pi$: pour tout nombre complexe z, on a*

$$\mathrm{e}^{z+2\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^z \ .$$

On peut étendre l'exponentielle complexe à tout $\mathbb{C}$.

Définition 13. La fonction exponentielle complexe est définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\{\cos(\mathrm{Im}(z)) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(z))\} \ .$$

L'exponentielle complexe ainsi étendue conserve la propriété de morphisme de groupes.

Proposition 9. *Pour tout* $z, z' \in \mathbb{C}$, *on a* $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{z'}$.

Démonstration. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x + \mathrm{i}y'$. On a alors, par définition

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{x+x'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y+y')} \ .$$

En utilisant les propriétés de l'exponentielle réelle, et le théorème 8, on obtient donc

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{x+x'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y+y')} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{x'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y'} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\mathrm{e}^{x'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y'} = \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{z'} \ .$$

□

Autres propriétés Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}) \ , \quad |\mathrm{e}^{z}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \ , \quad \mathrm{e}^{z+\mathrm{i}\pi} = -\mathrm{e}^{z} \ .$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2} \ , \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} \ .$$

On obtient aussi aisément les formules usuelles de trigonométrie.

$$\begin{aligned}
\cos(\theta + \theta') &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \ , \\
\sin(\theta + \theta') &= \cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta') \ , \\
\cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta) \ , \\
\sin(2\theta) &= 2\cos(\theta)\sin(\theta) \ .
\end{aligned}$$

On en déduit les formules de transformation de produits en sommes et de sommes en produits et les premières formules de linéarisation qui seront généralisées ultérieurement.

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)\cos(\theta') &= \frac{1}{2}\cos(\theta + \theta') + \frac{1}{2}\cos(\theta - \theta') \ , \\
\sin(\theta)\sin(\theta') &= \frac{1}{2}\cos(\theta + \theta') - \frac{1}{2}\cos(\theta - \theta') \ , \\
\sin(\theta)\cos(\theta') &= \frac{1}{2}\sin(\theta + \theta') + \frac{1}{2}\sin(\theta - \theta') \ , \\
\cos(\theta) + \cos(\theta') &= 2\cos\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \ , \\
\cos(\theta) - \cos(\theta') &= 2\cos\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \ , \\
\sin(\theta) + \sin(\theta') &= 2\sin\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \ , \\
\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \ , &\quad \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \ .
\end{aligned}$$

Interprétation géométrique des nombres complexes

Tout point du plan $\mathbb{R}^2$ peut être représenté par un nombre complexe z appelé l'affixe. Si $z \neq 0$, alors $z/|z|$ est dans le cercle unité, et donc il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Le nombre θ est alors appelé l'argument de z, noté $\arg(z)$. Si z' est un nombre complexe tel que $z' = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$, alors $zz' = rr'\mathrm{e}^{\theta+\theta'}$, i.e. $|zz'| = rr'$ et $\arg(z + z') = \theta + \theta'$ (modulo 2π).

La multiplication par un nombre complexe non nul z peut donc être vue comme une transformation géométrique. Soit $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. Soit A un point du plan d'affixe z'. Alors zz' est l'affixe du point obtenu par rotation d'angle θ, et homothétie de rapport r. Une telle application, composéé d'une rotation et d'une homothétie est appelée similitude. Cf. Figure 2.

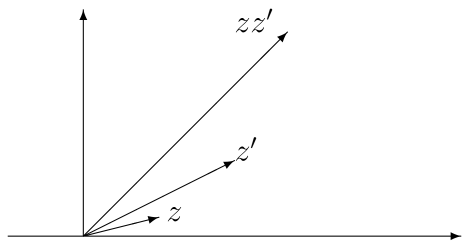

FIGURE 2 – La multiplication par z

Grâce à cette interprétation, on voit aisément comment trouver une racine carrée de tout nombre complexe. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Soit r son module et θ son arguemnt, i.e. $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Les racines carrées de z sont donc les nombres complexes z_1 et z_2 définis par

$$z_1 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\ , \quad z_2 = -\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2+\pi)}\ .$$

Remarquons que si $z \in \mathbb{R}_+$ alors les reux racines carrées de z sont réelles, et par convention on dénote $\sqrt{z}$ la racine positive. Si $z \in \mathbb{R}_-^*$, alors les reux racines carrées de z sont imaginaires pures.

Résolution des équations du second degré à coefficients complexes

Nous pouvons maintenant résoudre les équations du second degré à coefficients complexes. Soit a, b, c trois nombres complexes, $a \neq 0$. Montrons que l'équation

$$aX^2 + bX + c = 0$$

admet toujours deux racines (éventuellement confondues) dans $\mathbb{C}$. On utilise la même décomposition que dans le cas réel.

$$aX^2 + bX + c = a\left\{\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\}\ .$$

La discussion quant au signe de $b^2 - 4ac$ n'a plus de raison d'être. Soit z_1 une racine carrée (complexes) de $(b^2 - 4ac)/4a^2$. On a alors

$$aX^2 + bX + c = a \left(X + \frac{b}{2a} - z_1 \right) \left(X + \frac{b}{2a} + z_1 \right) .$$

Les racines complexes de l'équation $aX^2+bX+c = 0$ sont donc $-b/(2a)+z_1$ et $-b/(2a)+z_1$, ce que l'on peut écrire symboliquement

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} , \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Remarquons que si les coefficients a, b, et c sont réels, alors les racines sont réelles si $b^2 - 4ac \geq 0$, ou complexes et conjuguées si $b^2 - 4ac < 0$.

Racines n-ièmes de l'unité

L'équation $X^n = 1$ admet une ou deux racines réelles, selon la parité de n. Dans $\mathbb{C}$, elle admet exactement n racines.

Proposition 10. *Les racines n-ièmes de l'unité sont les racines de l'équation $X^n = 1$, définies par*

$$z_k = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} , \quad 0 \leq k \leq n-1 .$$

Les racines n-ièmes autres que 1 sont les racines de l'équation

$$X^{n-1} + \cdots + X + 1 = 0 .$$

La dernière propriété résulte de la factorisation $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + \cdots + X + 1)$. Toute racine n-ième de l'unité z différente de 1 vérifie donc la relation $z^n + \cdots + z + 1 = 0$.

Les racines n-ièmes de l'unité peuvent être représentées graphiquement sur le cercle unité. Cf. Figure 3 où sont représentées les racines cubiques de l'unité, 1, $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ et $\mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3} = \bar{\mathrm{j}}$. Du fait de la factorisation $X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$, on remarque que j et j^2 sont les racines de l'équation à coefficients réels $X^2 + X + 1 = 0$, et sont donc complexes conjuguées.

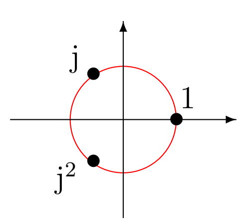

FIGURE 3 – Les racines cubiques de l'unité

De même, pour tout réel $z \neq 0$, l'équation $X^n = z$ admet n racines distinctes, $z_0, \ldots, z_{n-1}$, appelées racines n-ième de z. Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, on a

$$z_k = r^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta/n} , \quad 0 \leq k \leq n-1 .$$

Utilisation des nombres complexes pour le calcul des sommes trigonométriques

Soit z un nombre complexe différent de 1. On a l'identité

$$z^{n-1} + \cdots + z + 1 = \frac{z^n - 1}{z - 1} \; .$$

Posons $r = |z|$ et soit $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On a donc

$$\sum_{i=0}^{n-1} z^k = \sum_{i=0}^{n-1} r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \frac{r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - 1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1} \; .$$

Déterminons les parties réelles et imaginaires du membre de droite.

$$\begin{aligned}
\frac{r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - 1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1} &= \frac{(r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - 1)(r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - 1)}{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1)(r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - 1)} \\
&= \frac{r^{n+1}\cos((n-1)\theta) - r^n \cos(n\theta) - r\cos(\theta) + 1}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1} \\
&\quad + \mathrm{i}\, \frac{r^{n+1}\sin((n-1)\theta) - r^n \sin(n\theta) - r\sin(\theta)}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1} \; .
\end{aligned}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient les identités

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} r^k \cos(k\theta) &= \frac{r^{n+1}\cos((n-1)\theta) - r^n \cos(n\theta) - r\cos(\theta) + 1}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1} \; , \\
\sum_{i=0}^{n-1} r^k \sin(k\theta) &= \frac{r^{n+1}\sin((n-1)\theta) - r^n \sin(n\theta) - r\sin(\theta)}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1} \; .
\end{aligned}$$

Si $r = 1$, on obtient

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \; .$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \cos(k\theta) &= \frac{\cos((n-1)\theta/2)\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \; , \\
\sum_{i=0}^{n-1} \sin(k\theta) &= \frac{\sin((n-1)\theta/2)\sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \; .
\end{aligned}$$

Linéarisation

L'exponentielle complexe permet de transformer des puissances des fonctions trigonométriques en sommes. Ce procédé sera utile pour les calculs d'intégrales. Rappelons la formule du binôme, valable pour a, b nombres complexes quelconques :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} ,$$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Appliquons cette formule pour calculer $\cos^n(\theta)$.

$$\begin{aligned}\cos^n(\theta) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n &= 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\theta} = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)\theta} \\ &= 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((2k-n)\theta) + \mathrm{i}2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin((2k-n)\theta) .\end{aligned}$$

Le membre de gauche de cette équation est réel, donc le membre de droite doit l'être aussi. On en déduit donc les deux identités, valables pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos^n(\theta) &= 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((2k-n)\theta) , \\ 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin((2k-n)\theta) &= 0 .\end{aligned}$$

De la même façon, on obtient, en remarquant que $1/\mathrm{i} = -\mathrm{i} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$,

$$\begin{aligned}\sin^n(\theta) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^n &= 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)\theta} \\ &= 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cos(n\pi/2+(2k-n)\theta) + \mathrm{i}2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\sin(n\pi/2+(2k-n)\theta) .\end{aligned}$$

Par identification des parties réelle et imaginaire (nulle), on obtient les formules

$$\begin{aligned}\sin^n(\theta) &= 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cos(n\pi/2+(2k-n)\theta) , \\ 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\sin(n\pi/2+(2k-n)\theta) &= 0 .\end{aligned}$$

On peut simplifier les formules précédentes en distinguant selon la parité de n.

$$\cos^{2q}(\theta) = 2^{-2q}\left\{1 + 2\sum_{k=0}^{q-1}\binom{2q}{k}\cos((2q-2k)\theta)\right\} \ ,$$

$$\cos^{2q+1}(\theta) = 2^{-2q}\sum_{k=0}^{q}\binom{2q}{k}\cos((2q+1-2k)\theta) \ ,$$

$$\sin^{2q}(\theta) = 2^{-2q}(-1)^q\left\{1 + 2\sum_{k=0}^{q-1}\binom{2q}{k}(-1)^k\cos((2q-2k)\theta)\right\} \ ,$$

$$\sin^{2q+1}(\theta) = 2^{-2q}(-1)^{q+1}\sum_{k=0}^{q}\binom{2q+1}{k}(-1)^k\sin((2q+1-2k)\theta) \ .$$

Inversement, on obtient des formules pour exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(\theta)$ comme polynômes trigonométriques.

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^n\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{Re}(\mathrm{i}^{n-k})\cos^k(x)\sin^{n-k}(x) \ ,$$

$$\sin(n\theta) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right) = \mathrm{Im}\left((\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^n\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{Im}(\mathrm{i}^{n-k})\cos^k(x)\sin^{n-k}(x) \ .$$

En utilisant la relation $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, on peut réécrire les formules ci-dessus en ne faisant intervenir qu'une seule fonction trigonométrique.

Exemples

Linéarisons $\cos^4(\theta)$ et $\sin^4(\theta)$. En appliquant les formules, on obtient

$$\cos^4(\theta) = 2^{-4}\{1 + 8\cos(2\theta) + 2\cos(4\theta)\} = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(4\theta) \ ,$$

$$\sin^4(\theta) = 2^{-4}\{1 - 8\cos(2\theta) + 2\cos(4\theta)\} = \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(4\theta) \ .$$

Remarquons à titre de vérification que pour $\theta = 0$, le membre de droite de la dernière formule est bien nul. Exprimons mainteant $\sin^5(\theta)$ comme un polynôme trigonométrique en sinus. On va appliquer la formule générale obtenue plus haut, en remarquant que $\mathrm{Im}(\mathrm{i}^k) = 0$ si k est pair et $\mathrm{Im}(\mathrm{i}^k) = (-1)^q$ si $k = 2q+1$, puis remplacer tous les cosinus par des sinus.

$$\begin{aligned}
\sin(5\theta) &= \sin^5(\theta) - 10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 5\cos^4(\theta)\sin(\theta) \\
&= \sin^5(\theta) - 10\{1 - \sin^2(\theta)\}\sin^3(\theta) + 5\{1-\sin^2(\theta)\}^2\sin(\theta) \\
&= 16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta) \ .
\end{aligned}$$

On remarquera dans les formules précédentes les parités des termes.

2.1 Exercices

Exercice 2.1. Quels sont les nombres complexes dont le carré est égal au conjugué ?

Exercice 2.2. Montrer que

$$(z + z' \in \mathbb{R} \text{ et } zz' \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrow (z \text{ et } z' \text{ sont réels ou } z' = \bar{z}).$$

Exercice 2.3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie l'égalité $z + \bar{z} + z\bar{z} = 0$.

Exercice 2.4. x, y et z étant trois nombres complexes de module égal à 1, comparer les modules des nombres complexes $x + y + z$ et $xy + yz + zx$.

Exercice 2.5. Mettre sous la forme $a + \mathrm{i}b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les complexes

$$\frac{1-3\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\ , \quad \left(\frac{2-3\mathrm{i}}{1+7\mathrm{i}}\right)^2\ , \quad \frac{\mathrm{i}+5}{(\mathrm{i}+3)^2}\ .$$

Exercice 2.6. Montrer que $(1+2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$ est réel sans en calculer la valeur.

Exercice 2.7. Calculer les racines carrées des nombres complexes $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $8 - 6\mathrm{i}$ et $8\mathrm{i} - 6$.

Exercice 2.8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2 + 6\mathrm{i})z + 2\mathrm{i} - 5 = 0$.

Exercice 2.9. Calculer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des nombres suivants : 100, -100, $3+4\mathrm{i}$, $-5 - 12\mathrm{i}$.

Exercice 2.10. Donner en fonction de θ l'argument des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\theta - i\sin\theta, \\ z_2 &= -\sin\theta + i\cos\theta, \\ z_3 &= \sin\theta + i\cos\theta, \\ z_4 &= -\sin\theta - i\cos\theta, \\ z_5 &= -\cos\theta + i\sin\theta. \end{aligned}$$

Exercice 2.11. Soit a, b et c les trois nombres complexes définis par

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\ , \quad b = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\ , \quad c = ab\ .$$

Donner un argument de c.

Exercice 2.12. Déterminer les racines cubiques de $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et représenter leurs images dans le plan complexe.

Exercice 2.13. Calculer $(1 - 2\mathrm{i})^4$, puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -7 + 24\mathrm{i}$.

Exercice 2.14. Calculer les racines cubiques de $z = (1 - i)/\sqrt{2}$.

Exercice 2.15. Trouver tous les couples (x, y) réels tels que $(1 + i)/(1 - i) = xe^{iy}$.

Exercice 2.16. Donner sous forme cartésienne les racines de l'équation

$$(3 + 7\mathrm{i})z^2 - 8(1 + 2\mathrm{i})z + 4(1 + \mathrm{i}) = 0 \ .$$

En déduire les solutions de l'équation

$$(3 - 7\mathrm{i})z^2 - 8(1 - 2\mathrm{i})z + 4(1 - \mathrm{x}i) = 0 \ .$$

Exercice 2.17. Soient A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectifs a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si on a $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0$ ou $a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j} = 0$ où j est la racine cubique de l'unité de partie imaginaire strictement positive, i.e. $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

Exercice 2.18. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^5 + 8X^4 + 26X^3 + 44X^2 + 40X + 16$ après avoir vérifié qu'il admet -2 pour racine.

Exercice 2.19. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^4 - 2X^2\cos(\phi) + 1$ où ϕ est un réel donné.

Exercice 2.20.

(i) Calculer le module et l'argument de $z_1 = (\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2})/2$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

(ii) En déduire le module et l'argument de $z = z_1/z_2$.

(iii) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 2.21. Déterminer le module et l'argument de $z = (1+\mathrm{i})/(1-\mathrm{i})$, puis calculer z^{32}.

Exercice 2.22. Déterminer les complexes z vérifiant $z^3 = \mathrm{i}/\bar{z}$.

Exercice 2.23. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \bar{z}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.24. Linéariser $\cos(x)\cos^2(5x)$ et $\sin^2(x)\cos(4x)$.

Exercice 2.25. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Exercice 2.26. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes

$$y_1 = 1 + \cos x + \mathrm{i}\sin x \quad \text{et} \quad y_2 = 1 - \cos x - \mathrm{i}\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Utiliser ces résultats pour simplifier la fraction y_1/y_2.

Exercice 2.27. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

(i) $\sin(2x) = \cos(4x + \pi/2)$;

(ii) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

Exercice 2.28. Déterminer les réels t tels que toutes les racines de l'équation

$$z^2 - 2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + 1 = 0$$

soient imaginaires pures.

Exercice 2.29. Soit a un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}\right)^3 = \frac{1+\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}a} \ .$$

Indication : on posera $a = \tan(\alpha/2)$ avec $\alpha \in]-\pi, \pi[$ et on donnera les solutions en fonction de α.

Exercice 2.30. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+bk)}$. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+bk)$.

Exercice 2.31. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) \ .$$

En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) \ .$$

Exercice 2.32. Soit q un entier fixé, $q \geq 2$. Soit z une racine q-ième de l'unité, $z \neq 1$. pour $n \geq 1$, on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$. Montrer que la suite S_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes. En déduire en fonction de n la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \sin(2k\pi/3)$.

Exercice 2.33. Soit $n \geq 2$, on considère les nombres complexes (racines $n$ièmes de l'unité) $z_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Calculer en fonction de n la somme P_n définie par $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} P_n$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 2.34. Soit P le polynôme défini par :

$$P = X^4 + (-4+2\mathrm{i})X^3 + (12-8\mathrm{i})X^2 + (4+26\mathrm{i})X - 13 \ .$$

(i) Montrer que $-\mathrm{i}$ est une racine du polynôme P. Préciser son ordre de multiplicité.

(ii) Montrer que P admet une racine réelle. Préciser son ordre de multiplicité.

(iii) Factoriser le polynôme P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$.

(iv) Soit Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X+\mathrm{i})^2$.

  (a) En utilisant les questions précédentes déterminer les polynômes Q et R.

  (b) En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ du polynôme Q.

Exercice 2.35. Calculer $\sum_{k=0}^{2n-1} \cos^{2p}(x + k\pi/n)$.

3 Suites

Définition 14 (Suite réelle ou complexe)**.** Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Une suite complexe est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. L'image d'un entier n par une suite u à valeurs réelles ou complexes est généralement notée u_n et appelée n-ième terme de la suite.

Définition 15 (Suite majorée, minorée, bornée)**.** Une suite réelle u est dite majorée si il existe un réel A tel que $u_n \leq A$ pour tout $n \geq 0$; elle est dite minorée si il existe un réel A tel que $u_n \geq A$ pour tout $n \geq 0$; elle est dite bornée si elle est majorée et minorée. Une suite complexe u est dite bornée si la suite réelle des modules $|u_n|$, $n \geq 0$ est majorée.

Définition 16 (Borne supérieure, borne inférieure)**.** Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si A est majorée, alors elle admet une borne supérieure. Si A est minorée, alors elle admet une borne inférieure.

Définition 17 (Suite monotone)**.** Une suite réelle u est dite croissante à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq u_{n+1}$; elle est dite décroissante à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n+1}$. Elle est dite monotone à partir du rang n_0 si elle est croissante ou bien décroissante à partir du rang n_0.

Définition 18 (Suite convergente)**.** Une suite à valeurs réelles ou complexes u est dite convergente si il existe un nombre réel ou complexe ℓ tel que

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \geq n_0 \ , \ |u_n - \ell| \leq \epsilon \ .$$

On dit alors que la suite u converge, ou tend, vers ℓ, et on écrit $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.

Remarque La limite d'une suite réelle convergente est un nombre réel. Si une suite complexe converge, sa partie réelle et sa partie imaginaire forment des suites convergentes, et la limite de la partie réelle (resp. imaginaire) est la partie réelle (resp. imaginaire) de la limite.

Théorème 10. *Soit u une suite convergente. Alors u admet une unique limite.*

Théorème 11. *Une suite convergente est bornée.*

Théorème 12. *Soit u et v deux suites convergentes, ℓ et m leurs limites.*
- *La suite $u + v$ est convergente et sa limite est $\ell + m$.*
- *La suite uv est convergente et sa limite est ℓm.*
- *Si $m \neq 0$, la suite u/v est convergente et sa limite est ℓ/m.*

Théorème 13. *Soit u une suite convergente ayant pour limite zéro et v une suite bornée. Alors la suite uv est convergente et a pour limite zéro.*

Définition 19 (Suite divergente)**.** On dit qu'une suite réelle u tend vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \; , \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; , \; \forall n \geq n_0 \; , u_n \geq A \; .$$

On dit qu'une suite réelle u tend vers $-\infty$ si $-u$ tend vers $+\infty$, soit

$$\forall A \in \mathbb{R} \; , \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; , \; \forall n \geq n_0 \; , u_n \leq A \; .$$

Une suite est dite divergente si elle tend vers $+\infty$ ou bien vers $-\infty$.

Définition 20 (Suites géométriques)**.** Une suite u à valeurs complexes est dite géométrique si il existe un nombre complexe w tel que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = wu_n$.

Somme d'une suite géométrique Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $w \in \mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{j=q}^{n} u_j = u_q \frac{1 - w^{n-q+1}}{1 - w} \; .$$

Soit S la suite définie par $S_n = \sum_{j=0}^{n} u_j$. Alors si $|w| < 1$, la suite S est convergente et sa limite est donnée par

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{u_0}{1 - w} \; .$$

Si $|w| \geq 1$ la suite S est divergente. Si la raison w est de la forme $w = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}p\pi/q}$, où p et q sont des entiers premiers entre eux et $p < q$, alors la suite S est périodique de période q. En effet, $w^q = 1$, et donc $1 + w + \cdots + w^{q-1} = 0$. La suite S prend donc q valeurs disctintes.

Exemple 3.1. Calculer en fonction de n la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2ik\pi/3}$. Posons $w = \mathrm{e}^{2ik\pi/3}$.

Critères de convergence

Théorème 14. *Une suite réelle croissante (au delà d'un certain rang n_0) et majorée est convergente. Une suite réelle décroissante (au delà d'un certain rang n_0) et minorée est convergente.*

Ce théorème est une propriété fondamentale de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et ne peut pas être démontré sans avoir construit rigoureusement $\mathbb{R}$ à partir de l'ensemble des nombres rationnels.

Remarque Si la suite u est croissante (au delà d'un certain rang n_0) et majorée par le réel A, alors

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \sup_{n \geq n_0} u_n \leq A \; .$$

De même, si la suite u est décroissante (au delà d'un certain rang n_0) et minorée par le réel A, alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \inf_{n\geq n_0} u_n \geq A .$$

Corollaire 6. *Si une suite est croissante mais non majorée, alors elle tend vers $+\infty$. Si une suite est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.*

Exemple 3.2 (Série harmonique)**.** On appelle série harmonique la suite u de terme général $u_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$, $n \geq 1$ est croissante mais non majorée donc divergente. En effet, pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_{2n} - u_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} \geq \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on obtient donc

$$u_{2^k} = u_1 + \sum_{j=1}^{k} (u_{2^j} - u_{2^{j-1}}) \geq 2k + 1 .$$

La suite u n'est donc pas bornée. Puisqu'elle est croissante, elle tend donc vers $+\infty$.

Définition 21 (Suites adjacentes)**.** Deux suites réelles u et v sont dites adjacentes si u est croissante, v est décroissante, si la suite $v - u$ est positive et tend vers 0.

Théorème 15. *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.*

Démonstration. Par hypothèse, la suite u est croissante et majorée, et la suite v est décroissante et minorée, donc les deux suites convergent. Soit ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la convergence, et puisque l'on a aussi supposé que $u - v$ tend vers 0, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$|u_n - \ell_1| \leq \epsilon/3 , \quad |v_n - \ell_2| \leq \epsilon/3 , \quad |u_n - v_n| \leq \epsilon/3 .$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient donc

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - v_n| + |v_n - \ell_2| \leq \epsilon .$$

On a donc obtenu que pour tout $\epsilon > 0$, $|\ell_1 - \ell_2| \leq \epsilon$. Ceci n'est possible que si $\ell_1 = \ell_2$. On conclut donc que les deux suites ont la même limite. □

Exemple 3.3. Soit u la suite réelle définie par

$$u_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{2j+1} .$$

La suite u est convergente et sa limite est appelée $\pi/4$.

L'exemple précédent rentre dans le cadre plus général des séries alternées.

Théorème 16. *Soit u une suite décroissante convergent vers zéro. La suite v définie par $v_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ est convergente.*

Démonstration. Les suites s et t définie par $s_n = v_{2n}$ et $t_n = v_{2n+1}$ sont adjacentes. □

Définition 22 (Suite de Cauchy)**.** Une suite à valeurs réelles ou complexes u est appelée suite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \ , \ \forall n, m \geq n_0 \ , \ |u_n - u_m| \leq \epsilon \ .$$

Théorème 17. *Une suite convergente est de Cauchy.*

Théorème 18. *Une suite de Cauchy est convergente.*

Démonstration. Soit v et w les suites définies par

$$v_n = \inf_{k \geq n} u_k \ , \quad w_n = \sup_{k \geq n} u_k \ .$$

La suite v est croissante et la suite w est décroissante, et pour tout n, on a $v_n \leq w_n$. la suite v est donc majorée et la suite w est minorée. Montrons que les suites u_n et w_n sont adjacentes, c'est-à-dire que la suite $v - w$ tend vers zéro. Soit $\epsilon > 0$, et soit N tel que pour tout $n, m \geq N$, $|u_n - u_m| \leq \epsilon$. Fixons $m \geq N$. On a donc

$$\forall n \geq N \ , \ u_m - \epsilon \leq u_n \leq u_m + \epsilon$$

ce qui entraîne que

$$\forall n \geq N \ , \ u_m - \epsilon \leq \inf_{k \geq n} u_k \leq u_m + \epsilon \ .$$

Ces inégalités étant valables pour tout $m \geq N$, on a donc aussi

$$\forall n \geq N \ , \ \sup_{m \geq n} u_m - \epsilon \leq \inf_{k \geq n} u_k \leq \sup_{m \geq n} u_m + \epsilon \ ,$$

soit

$$\forall n \geq N \ , \ w_n - \epsilon \leq v_n \leq w_n + \epsilon \ ,$$

c'est-à-dire, finalement

$$\forall n \geq N \ , \ |w_n - v_n| \leq \epsilon \ ,$$

ce qui signifie précisément que la suite $w - v$ converge vers 0. Les deux suites v et w sont donc convergentes et ont la même limite, notée ℓ. Montrons que la suite u converge vers ℓ. Soit $\epsilon > 0$ et soit N tel que pour tout $n \geq N$, on ait simultanément $|v_n - \ell| \leq \epsilon$ et $|w_n - \ell| \leq \epsilon$. Puisque par définition $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout n, on a donc

$$\forall n \geq N \ , \ \ell - \epsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq \ell + \epsilon$$

et donc $|u_n - \ell| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qui montre que la suite u est convergente, avec ℓ pour limite. □

Corollaire 7. *Une suite de Cauchy est bornée.*

Exemple 3.4. Soit u la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdots + \frac{1}{n^2}$. La suite u est de Cauchy. En effet, on a, pour $m > n > 0$,

$$u_m - u_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} .$$

Cette inégalité est vraie pour tout $m > n$, et puis que $1/(nn!) \to 0$, pour tout ϵ, il existe un N tel que pour tout $m, n \geq N$, $|u_m - u_n| \leq \epsilon$. La suite u est donc de Cauchy, et donc converge.

Exemple 3.5. Soit u la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{n!}$. La suite u est de Cauchy et sa limite est notée e, le nombre tel que $\log(\mathrm{e}) = 1$. En effet, on a, pour $m > n > 0$,

$$\begin{aligned} u_m - u_n &= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(n+1) \times \cdots \times k} \\ &\leq \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right\} \leq \frac{1}{n \times n!} . \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $m > n$, et puisque $1/(n \times n!) \to 0$, on obtient que pour tout ϵ, il existe un N tel que pour tout $m, n \geq N$, $|u_m - u_n| \leq \epsilon$. La suite u est donc de Cauchy, et donc converge. La même majoration permet de montrer que sa limite e est irrationnelle. Cf. Exercice 3.11.

Notations de Landau

Définition 23. Soit u et v deux suites réelles ou complexes. On dit que $u_n = O(v_n)$ (u est grand O de v) si

$$\exists K \geq 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \geq n_0 \ , \ |u_n| \leq K|v_n| \ .$$

On dit que $u_n = o(v_n)$ (u est petit o de v) si

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \geq n_0 \ , \ |u_n| \leq \epsilon |v_n| \ .$$

On dit que la suite u est équivalent à la suite v à l'infini et l'on note $u_n \sim v_n$ si $u_n - v_n = o(u_n)$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.

Remarque Ces définitions permettent de considérer des suites dont les termes peuvent s'annuler. Si les termes de la suite v sont non nuls, alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} u_n = O(v_n) &\iff \text{la suite } u/v \text{ est bornée} \ , \\ u_n = o(v_n) &\iff \lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \ , \\ u_n \sim v_n &\iff \lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \ . \end{aligned}$$

Dire qu'une suite est $O(1)$ est équivalent à dire qu'elle est bornée ; dire qu'une suite est $o(1)$ est équivalent à dire qu'elle est converge vers 0.

Les exemples fondamentaux

- Si $0 < \gamma < \delta$, alors $n^\gamma = o(n^\delta)$ et $n^{-\delta} = o(n^\delta)$.
- Pour tout $\gamma, \delta > 0$, $(\log n)^\gamma = o(n^\delta)$ et $n^{-\delta} = o((\log n)^{-\gamma})$.
- Pour tout $\gamma, \delta > 0$, $n^\gamma = o(\mathrm{e}^{\delta n})$ et $\mathrm{e}^{-\delta n} = o(n^{-\gamma})$.

Proposition 11. • *Les relations o, O et $\sim$ sont transitives :*
- *si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$;*
- *si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$;*
- *si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.*

• *Si est bornée et $v_n = O(u_n)$, alors v est bornée.*

• *Si u est bornée et $v_n = o(u_n)$, alors* $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

• *Si u est bornée et $u_n = o(v_n)$, alors* $\lim_{n\to\infty} |v_n| = \infty$.

• *Si u et v sont des suites positives et $u_n = o(v_n)$ alors $1/v_n = o(1/u_n)$.*

Suites récurrentes

On appelle suite récurrente une suite u telle que u_n soit fonction d'une ou plusieurs valeurs précédentes. Plus précisemment, un suite u est dite récurrente d'ordre k s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+k} = f(u_{n+k-1}, \ldots, u_n)$. Une telle suite est entièrement déterminée par la fonction f et les k premières valeurs $u_0, \ldots, u_{k-1}$.

Proposition 12. *Si f est continue et si la suite réelle u est convergente, alors sa limite ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$. Si $f(u_0) = u_0$, alors la suite est constante.*

Exemple 3.6. Soit f la fonction définie sur $[0, \infty)$ par $f(x) = \sqrt{(x^2 + 7x)/2} - 1$ et soit u la suite récurrente définie par $u_0 \geq 1$ et $u_n = f(u_n)$. Les limites possibles de la suite u vérifient l'équation $f(x) = x$, soit $\sqrt{(x^2 + 7x)/2} - 1 = x$, i.e. $x^2 - 3x + 2 = 0$. Les seules limites possibles sont 1 et 2. Remarquons de plus que l'on a $f(x) > x$ si et seulement si $x^2 - 3x + 2 < 0$, i.e. $x \in]1, 2[$. On a donc les cas suivants.
- Si $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$, la suite u est constante.
- Si $x > 2$, alors $2 < f(x) < 2$ et donc si $u_0 > 2$, on a $2 < f(u_n) < u_n$ pour tout n, et donc la suite est décroissante et minorée, donc convergente, et sa limite est donc 2.
- Si $1 < x < 2$, on a $1 < x < f(x) < 2$, et donc si $u_0 \in]1, 2[$, alors pour tout n on a $1 < u_n < u_{n+1} < 2$. La suite u_n est croissante et majorée, donc convergente, et sa limite est donc 2.

Remarquons enfin que si $0 < x < 1$, alors $f(x) < x$, et donc si $u_0 \in]0, 1[$, la suite u est décroissante. Mais il existe un n tel que $u_n^2 + 7u_n < 0$, et donc la suite u n'est pas définie pour tout n.

Comme dans l'exemple précédent, l'étude des suites récurrentes générales repose sur des propriétés de monotonie.

Théorème 19. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I (non réduit à un point) et admettant un unique point fixe x^* dans I. Soit u la suite définie par la donnée de $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ et soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - x$. Si g est décroissante sur $[x^*, \infty[\cap I$ et croissante sur $]-\infty, x^*] \cap I$, alors la suite u converge vers x^*.*

Si f est de plus dérivable, on peut obtenir une vitesse de convergence.

Théorème 20. *Soit f une fonction continument dérivable sur un intervalle I (non réduit à un point), admettant le point fixe x^* dans I et telle que $|f'(x)| < 1$ sur I. Soit u la suite définie par la donnée de $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors la suite u converge vers x^* et il existe une constante positive C et un nombre réel $r \in [0, 1[$ tel que $|u_n - x| \leq Cr^n$.*

Exemple 3.7. Considérons la fonction $f(x) = \log(x+3)$ et la suite u définie par la donnée de u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$. La fonction f est définie sur $]-3, \infty[$ et admet un unique point fixe x^* ($x^* \approx 1.5052415$). Le graphe de la fonction f est donné Figure 4. Le point fixe x^* correspond à l'intersection du graphe de f et de la droite $y = x$. Les premières valeurs de la suite u pour $u_0 = 5$ et $u_0 = 0$ sont données Table 1. La dérivée de f est $f'(x) = 1/(x+3)$. On a donc $f'(x) < 1$ si et seulement si $x > -2$. La suite est donc convergente pour tout choix de $u_0 > -2$ et sa limite est x^*. On voit que la convergence est très rapide. Comme la fonction f est de plus concave (c'est-à-dire que sa dérivée est décroissante), on obtient que si $u_0 \geq x^*$, on a $0 \leq u_n - x \leq (u_0 - x^*)(x^* + 3)^{-n}$ pour tout $n \geq 0$.

5	2.0794415	1.6252013	1.5315199	1.5110574	1.5065316	1.5055278	1.505305
	1.5052556	1.5052446	1.5052422	1.5052417	1.5052415	1.5052415	1.5052415
0	1.0986123	1.4106485	1.4840217	1.5005203	1.504193	1.5050087	1.5051898
	1.50523	1.505239	1.5052409	1.5052414	1.5052415	1.5052415	1.5052415

TABLE 1 – Les quinze premières valeurs de la suite u pour $u_0 = 5$ et $u_0 = 0$.

Equations de récurrence linéaire

On considère des équations de récurrence linéaire du type

$$u_{n+q} = a_1 u_{n+q-1} + \cdots a_q u_n$$

où $a_1, \ldots, a_q$ sont des nombres complexes non tous nuls. L'étude des solutions de ce type de suite passe par l'étude des solutions du polynôme P appelé polynôme caractéristique de l'équation, défini par

$$P = X^q - \sum_{i=1}^{q} a_i X^{q-i} .$$

Considérons tout d'abord le cas le plus simple où P admet q racines distinctes, réelles ou complexes.

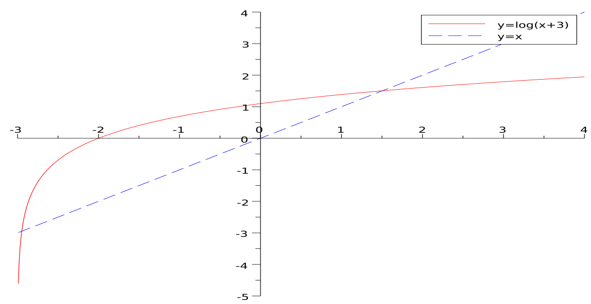

FIGURE 4 – Le graphe et le point fixe de la fonction $f(x) = \log(x+3)$.

Proposition 13. *Si le polynôme caractéristique de l'équation admet q racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, réelles ou complexes, alors les solutions de l'équation de récurrence $u_{n+q} = a_1 u_{n+q-1} + \cdots a_q u_n$ sont de la forme*

$$u_n = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \lambda_i^n$$

où les constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ sont déterminées par les conditions initiales $u_0, \dots, u_{q-1}$ (ou par n'importe quel q-uplet de valeurs successives de la suite $u_k, \dots, u_{k+q-1}$).

Exemple 3.8. Soit u la suite définie par l'équation de récurrence $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ (suite de Fibonacci). Le polynôme caractéristique est $P = X^2 - X - 1$, dont les racines sont $(1+\sqrt{5})/2$ et $(1-\sqrt{5})/2$. La racine positive $(1+\sqrt{5})/2$ est appelée nombre d'or. Les solutions sont donc de la forme $u_n = a((1+\sqrt{5})/2)^n + b((1-\sqrt{5})/2)^n$. Soit u_0 et u_1 les deux premières valeurs (arbitraires). On doit avoir

$$u_0 = a + b\,, \quad u_1 = a(1+\sqrt{5})/2 + b(1-\sqrt{5})/2$$

soit

$$a = -\frac{u_0(1-\sqrt{5})/2 - u_1}{\sqrt{5}}\,, \quad b = \frac{u_1(1+\sqrt{5})/2 - u_1}{\sqrt{5}}\,.$$

Exemple 3.9. Soit u la suite définie par l'équation de récurrence $u_n + u_{n-1} + u_{n-2} = 0$. Le polynôme caractéristique est $X^2 + X + 1$, dont les racines sont $\mathrm{j} = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$ et j^2 (les racines cubiques de l'unité). Les solutions sont donc de la forme $u_n = a\mathrm{j}^n + b\mathrm{j}^{2n}$. Soit u_0 et u_1 les deux premières valeurs (arbitraires). On doit avoir

$$u_0 = a + b\,, \quad u_1 = a\mathrm{j} + b\mathrm{j}^2$$

soit, en remarquant que $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$ et que $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$,

$$a = \frac{u_0 - u_1\mathrm{j}}{1 - \mathrm{j}^2}\,, \quad b = \frac{u_0 - u_1\mathrm{j}^2}{1 - \mathrm{j}}\,.$$

Remarquons que si u_0 et u_1 sont réels, alors tous les termes de la suite doivent être réels. Or, si u_0 et u_1 sont réels, les coefficients a et b sont conjugués. Les solutions sont donc de la forme $2\mathrm{Re}(a\mathrm{j}^n)$, i.e. sont réelles.

Dans le cas où le polynôme P a des racines multiples, on peut alors écrire

$$P = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i} ,$$

où $m_i \geq 1$ est la multiplicité de la racine λ_i. Les solutions ont la forme

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} P_i(n)\lambda_i^n$$

où le polynôme P_i est de degré $m_i - 1$.

Vitesse de convergence

Définition 24. Soit v une suite réelle décroissant vers 0 et soit u une suite (réelle ou complexe) convergente de limite ℓ. On dit que la suite u converge converge vers sa limite à la vitesse v si $|u_n - \ell| = O(v_n)$.

Exemple 3.10. La suite u de l'exemple 3.3 converge vers sa limite $\pi/4$ à la vitesse $1/n$.

3.1 Exercices

Exercice 3.1. Soit u et v deux suites à valeurs dans $[0, 1]$ telles que $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

Exercice 3.2. Soit u une suite et ℓ un réel tels que $\lim_{n\to\infty}(u_n - u_{n-1}) = \ell$.

(i) Montrer que $\lim_{n\to\infty} n^{-1}u_n = \ell$.

(ii) Si $\ell \neq 0$, montrer que $\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \frac{1}{2}\ell n^2$.

Exercice 3.3. (i) Calculer en fonction de $n \geq 2$ la somme $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

(ii) En déduire que la suite u définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est majorée.

(iii) En déduire qu'elle converge.

(iv) Soit ℓ sa limite (qu'on ne cherchera pas à déterminer). Montrer que $u_n - \ell = O(n^{-1})$.

(v) Montrer que pour tout $r \geq 2$, la suite v définie pour $n \geq 1$ par $v_n = 1 + 2^{-r} + \cdots + n^{-r}$ est convergente.

Exercice 3.4. Le but de cet exercice est de prouver que la suite u définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

est de Cauchy. On rappelle l'inégalité, valable pour tout $u \in [0,1]$,

$$0 \leq \log(1+u) - \frac{u}{1+u} \leq \frac{1}{2}u^2 \ .$$

Soit v la suite définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(i) Montrer que $v_n = \frac{1}{n+1} - \log(1 + \frac{1}{n})$.

(ii) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $0 \leq -v_n \leq \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

(iii) En déduire que pour $m \geq n \geq 1$, on a $0 \leq -v_{n+1} - \cdots - v_m \leq 1/n$.

(iv) En déduire que la suite u est de Cauchy.

(v) En déduire que $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = O(\log n)$.

Exercice 3.5 (Moyenne de Cesàro)**.** Soit u une suite réelle convergente et soit ℓ sa limite. Soit v la suite définie par $v_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)/n$, appelée la moyenne de Cesàro de la suite u.

(i) Montrer que $v_n - \ell = \{(u_1 - \ell) + (u_2 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)\}/n$.

(ii) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |u_k - \ell| + \epsilon \ .$$

(iii) En déduire que la suite v converge vers ℓ.

(iv) Donner un exemple de suite u divergente mais telle que sa moyenne de Césaro soit convergente.

Exercice 3.6. Soit u une suite réelle convergente et soit λ sa limite. Soit v la suite définie par $v_n = (u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n)/n(n+1)$. On rappelle que pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$.

(i) Montrer que $v_n - \lambda/2 = \frac{(u_1-\lambda)+2(u_2-\lambda)+\cdots+n(u_n-\lambda)}{n(n+1)}$.

(ii) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$|v_n - \lambda/2| \leq \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1} n_0 k|u_k - \lambda| + \frac{\epsilon}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k.$$

(iii) En déduire que la suite v converge vers $\lambda/2$.

Application. Montrer que la suite v définie par

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2 + 3\sin(k)}{3k+5}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3.7 (Généralisation de la sommation de Cesàro)**.** Soit t une suite à termes positifs telle que $\sum_{k=1}^{n} t_k = \infty$. Soit u une suite admettant la limite ℓ. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} t_k} = \ell \ .$$

Exercice 3.8. Calculez les trois premiers termes, puis le terme général de chacune des suites récurentes suivantes et déterminez sa limite (si elle existe).

(i) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

(ii) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$.

(iii) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ $u_{n+2} = -2u_n + 3u_{n+1}$.

(iv) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = -u_n + 2u_{n+1}$.

(v) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_{n+2} = -u_n - 2u_{n+1}$.

(vi) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_{n+2} = -4u_n + 4u_{n+1}$.

(vii) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = -\sqrt{2}u_n + 2u_{n+1}$.

(viii) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_{n+2} = -u_n + u_{n+1}$.

(ix) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_{n+2} = -u_n - u_{n+1}$.

Exercice 3.9. Etudier la suite u définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{(u_n^2 + 7u_n)/2} - 1$.

Exercice 3.10. Soient a_n et b_n les suites définies de la façon suivantes :

$$a_0 = 2, \quad b_0 = 1, \qquad a_n = (a_{n-1} + b_{n-1})/2, \quad a_n b_n = 2.$$

(i) Montrer que ces deux suites sont bien définies, que a_n est décroissante, b_n est croissante, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.

(ii) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n - b_n \leq (a_{n-1} - b_{n-1})^2/4$.

(iii) En déduire que a_n et b_n sont adjacentes et convergent vers $\sqrt{2}$.

Exercice 3.11. On considère la suite u définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ (en posant par convention $0! = 1$). Le but de l'exercice est de montrer que la suite u de Cauchy et que sa limite, notée e, est irrationnelle.

(i) Montrer que pour tout $m \geq n \geq 1$, $\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!}$.

(ii) En déduire que la suite u est de Cauchy.

(iii) Soit e la limite de la suite u. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n < \mathrm{e} < u_n + 1/(n!)$.

(iv) On suppose qu'il existe deux entiers p et q premiers entre eux (sans diviseurs communs) tels que $\mathrm{e} = p/q$. Montrer qu'il existe alors un entier n tel que $n!\mathrm{e}$ soit un entier pour lequel on a $n!u_n < n!\mathrm{e} < n!u_n + 1$. Conclure que e est irrationnel.

Exercice 3.12. Soient a, b, c, d des nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$. Soit f la fonction (appelée *homographique*) définie sur $\mathbb{C}$ par $h(z) = (az + b)/(cz + d)$.

(i) Déterminer, lorsqu'elle existe la réciproque de h.

(ii) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $h(z) = z$.

(iii) On suppose dans toute la suite que a, b, c, d sont réels avec $ad - bc = 1$. Tracer le graphe de la restriction de h à $\mathbb{R}$.

(iv) Soit u la suite définie par :

$$u_0 \neq -d/c\ , \quad u_{n+1} = h(u_n) = \frac{au_n + b}{cu_n + d}\ .$$

Etudier la suite u_n dans les cas suivants.

(a) $c = 0$ et $|a| = 1$.

(b) $c = 0$ et $|a| < 1$.

(c) $c = 0$ et $|a| > 1$.

(d) $c \neq 0$. On posera alors $w_n = cu_n + d$ et l'on supposera que $a + d > 2$ et $u_0 \notin [(a + d)^{-1}; 2[$. (Pourquoi ?)

Exercice 3.13. Soit $a > 0$ et soit u la suite réelle définie par $u_0 \neq 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)\ .$$

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction f par $f(x) = (x + a/x)/2$, $x > 0$.

(i) Montrer que pour tout $x > 0$, $x \neq \sqrt{a}$, $f(x) > \sqrt{a}$.

(ii) Montrer que si $x > \sqrt{a}$, alors $f(x) < x$.

(iii) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$ et la suite u est décroissante à partir du rang 1.

(iv) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) - \sqrt{a} = (x - \sqrt{a})^2/(2x)$.

(v) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_{n+1} - \sqrt{a} \leq (u_n - \sqrt{a})^2/(2\sqrt{a})$.

(vi) En déduire que la suite u converge vers a.

(vii) Montrer que pour tout $\gamma > 0$, $u_n - \sqrt{a} = O(\gamma^n)$.

Exercice 3.14. Soit u et v deux suites réelles dont les termes sont strictements positifs.

(i) Montrer que si u_n a une limite non nulle ℓ et $u_n \sim v_n$ alors $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$.

(ii) Montrer que si $u_n = O(v_n)$ alors $u_n^p = O(v_n^p)$ pour tout $p > 0$.

(iii) Montrer que si $u_n \sim v_n$ alors $u_n^p \sim v_n^p$ pour tout $p > 0$.

(iv) On pose $u_n = n$ et $v_n = n + \sqrt{n}$. Montrer que $u_n \sim v_n$ mais les suites α et β définies par $\alpha_n = \mathrm{e}^{u_n}$ et $\beta_n = \mathrm{e}^{v_n}$ ne sont pas équivalentes.