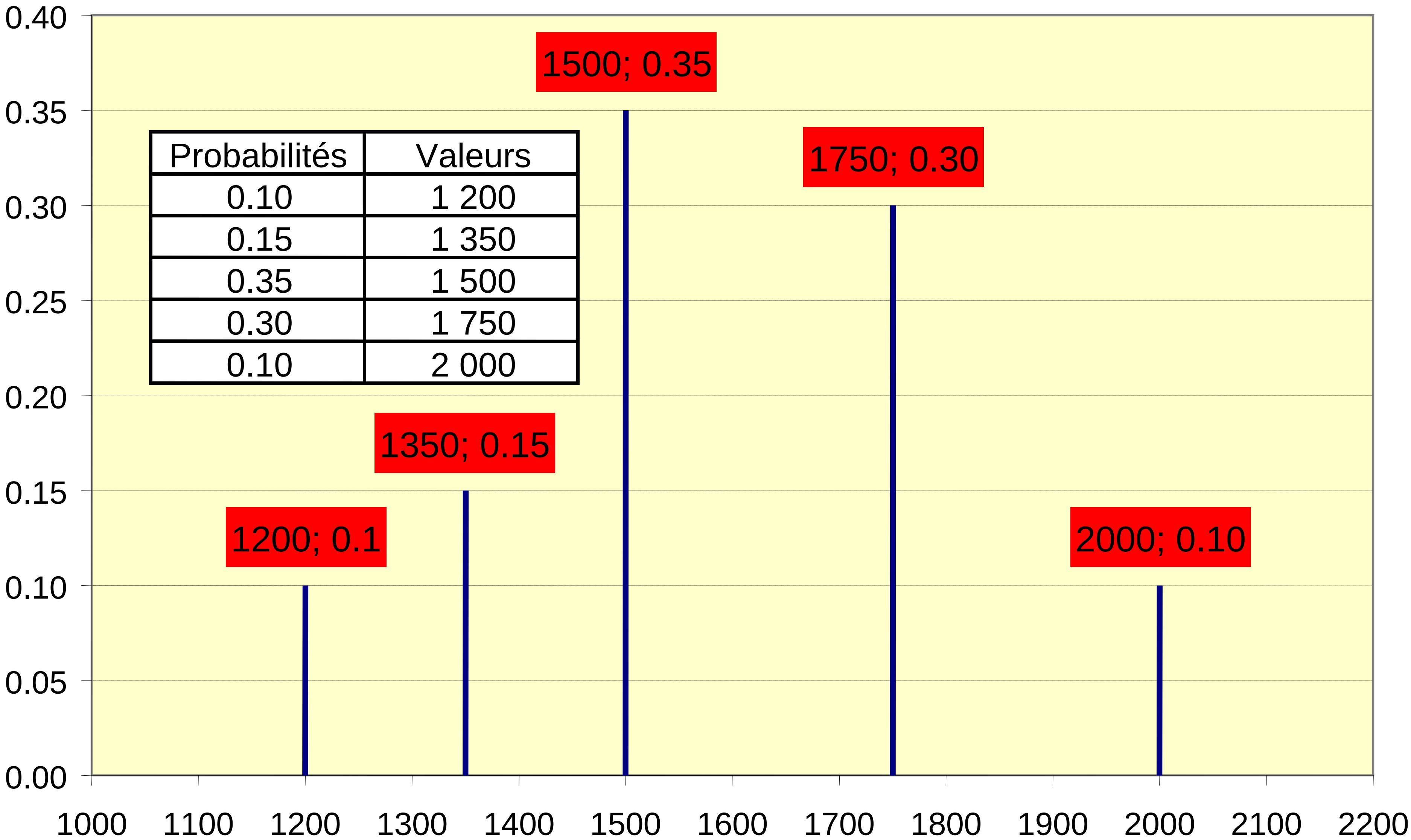
Nombres aléatoires et lois de probabilité

Un générateur de nombres aléatoires est un algorithme qui produit des séquences de nombres qui suivent une distribution de probabilité donnée et qui sont en apparence choisis au hasard.

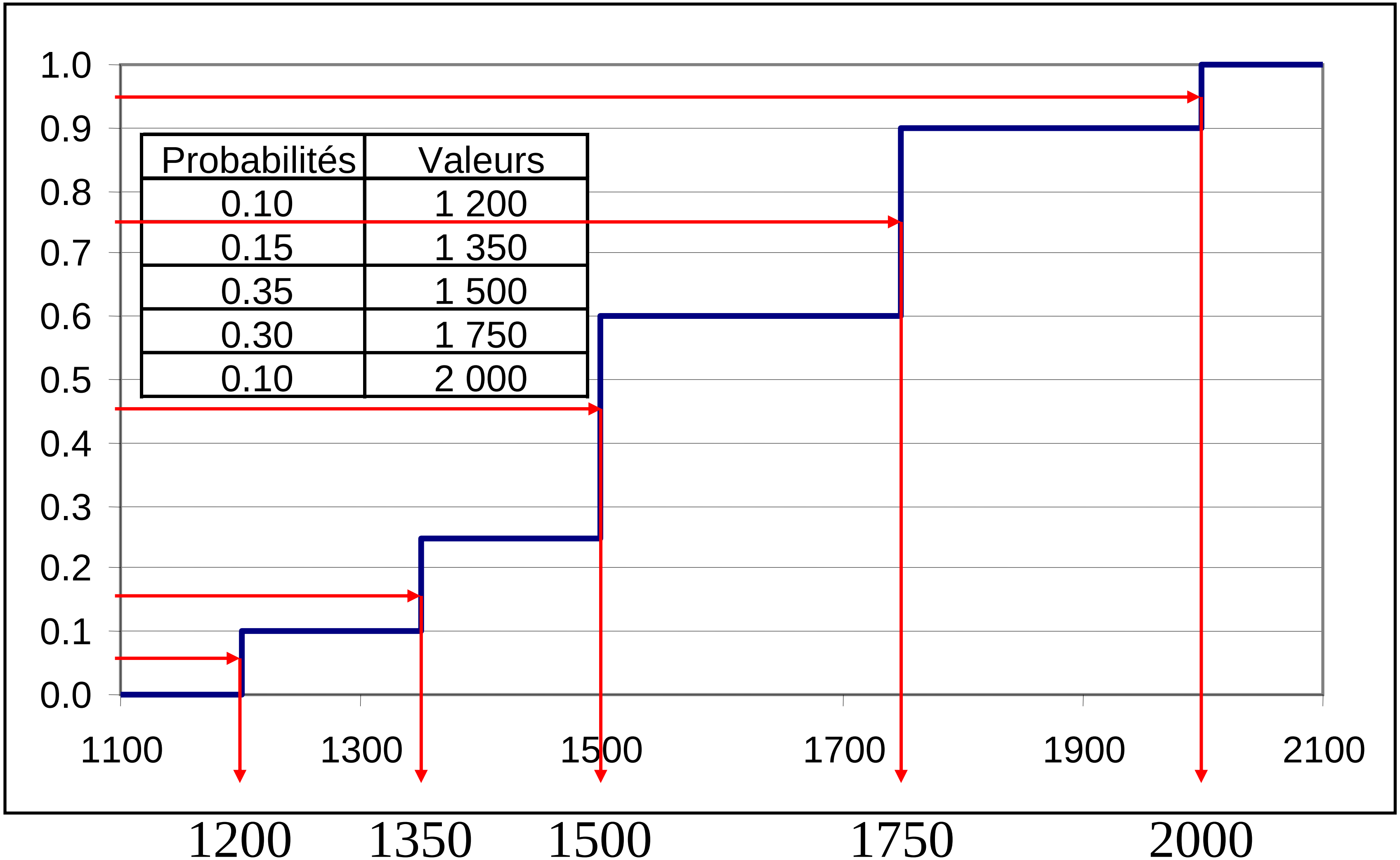
En toute rigueur, les nombres générés par un ordinateur ne devraient pas être qualifiés d'aléatoires parce qu'ils sont prévisibles et reproductibles (ce qui est parfois avantageux) dès que l'on connait le générateur de nombres utilisé ainsi que ses paramètres. Par conséquent, on les qualifie plutôt de pseudo-aléatoire.

Nombres aléatoires et lois de probabilité



Probabilités	Valeurs
0.10	1 200
0.15	1 350
0.35	1 500
0.30	1 750
0.10	2 000

Nombres aléatoires et lois de probabilité



Probabilités	Valeurs
0.10	1 200
0.15	1 350
0.35	1 500
0.30	1 750
0.10	2 000

Nombres aléatoires et lois de probabilité

Générateurs congruentiels linéaires
Générateurs à congruence linéaire

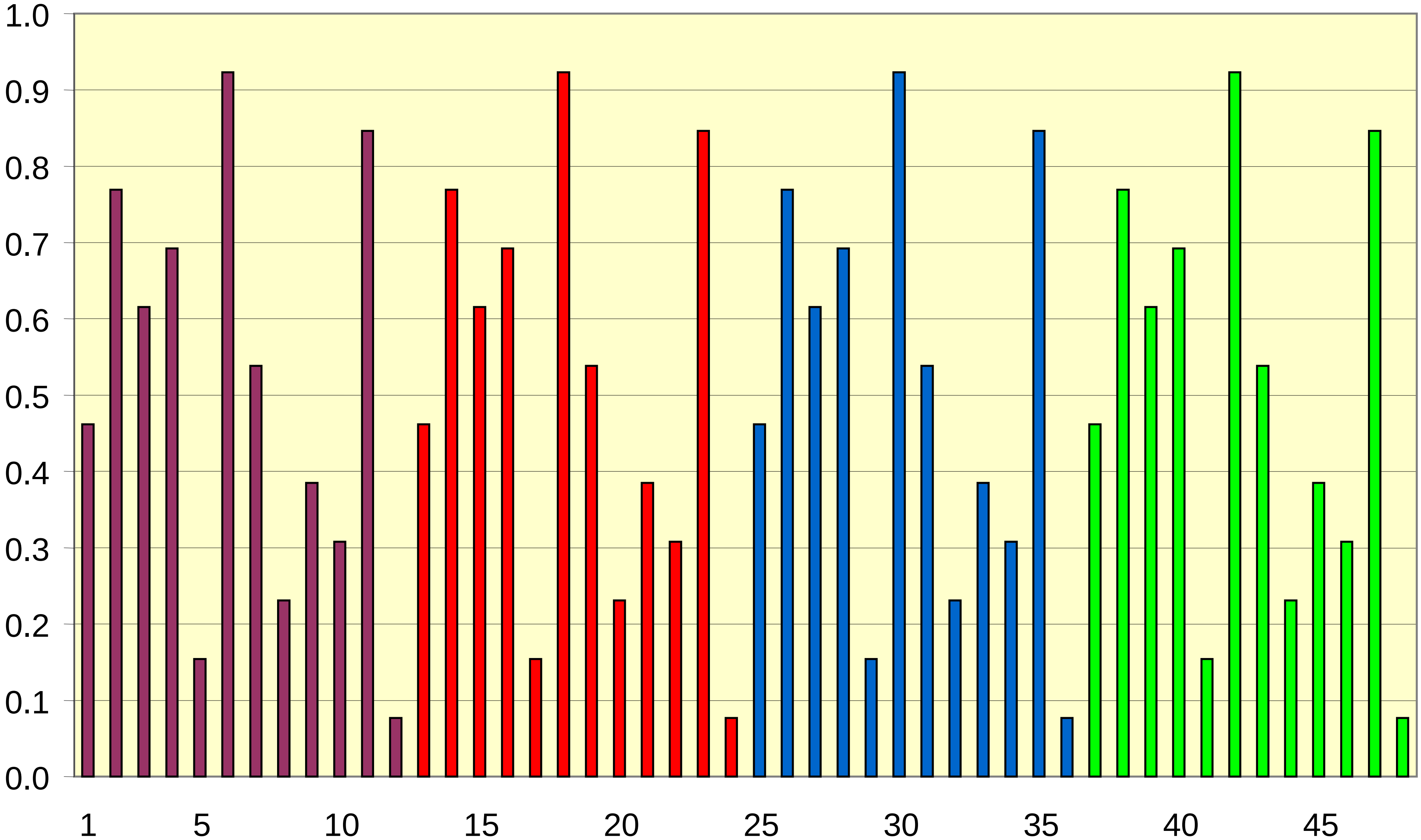
$$x_{i+1}=(ax_i+c) \bmod m$$

où x mod m est égal au reste de la division de x par m
(et donc $x \bmod m \in [0;m-1]$)

m	13
a	6
c	0
x_0	1

i	x_{i-1}	$ax_{i-1}+c$	$ax_{i-1}+c \bmod m$	R_i
1	x_0=1	6	6	0.4615
2	6	36	10	0.7692
3	10	60	8	0.6154
4	8	48	9	0.6923
5	9	54	2	0.1538
6	2	12	12	0.9231
7	12	72	7	0.5385
8	7	42	3	0.2308
9	3	18	5	0.3846
10	5	30	4	0.3077
11	4	24	11	0.8462
12	11	66	1	0.0769

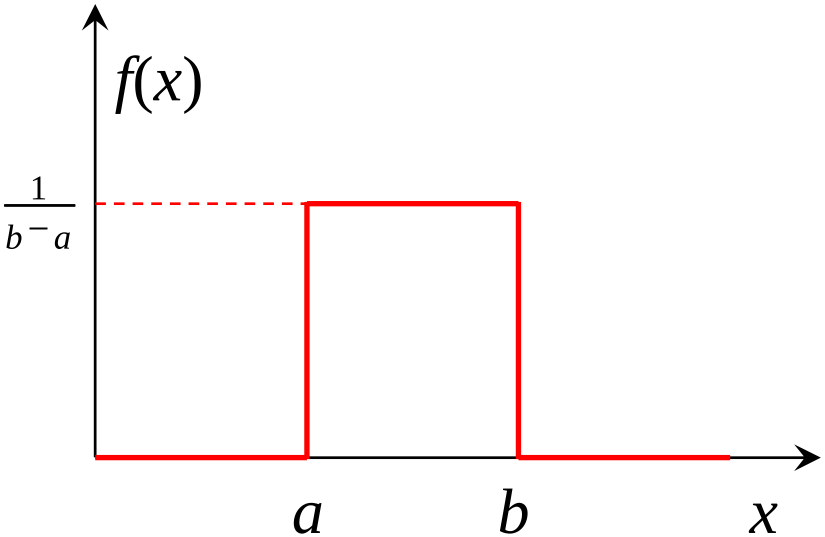
Nombres aléatoires et lois de probabilité

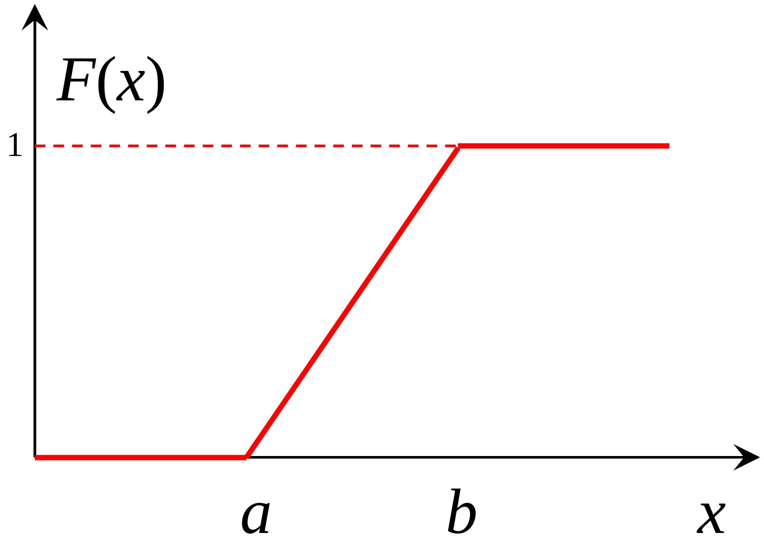


Nombres aléatoires et lois de probabilité

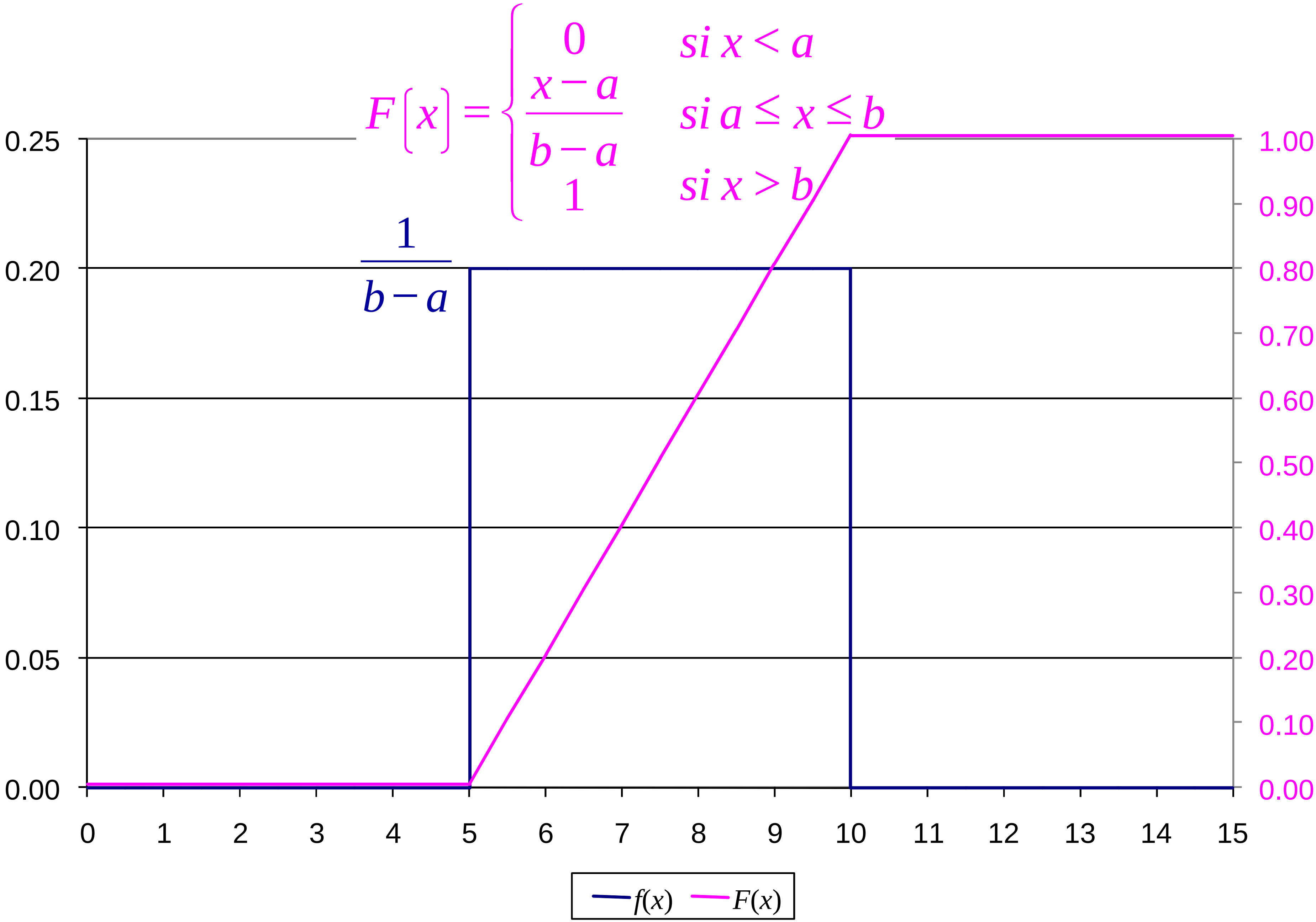
Une V.A. X suit une loi uniforme de paramètres minimum = a et maximum = b (notée $X \sim> \mathcal{U}\,[a,b]$) si elle admet pour densité de probabilité la fonction $f(x)$ et pour fonction de répartition $F(x)$:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 0 & si\ x<a \\ \dfrac{1}{b-a} & si\ a\leq x\leq b \\ 0 & si\ x>b \end{cases} \qquad F\left(x\right)=\begin{cases} 0 & si\ x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ a\leq x\leq b \\ 1 & si\ x>b \end{cases}$$



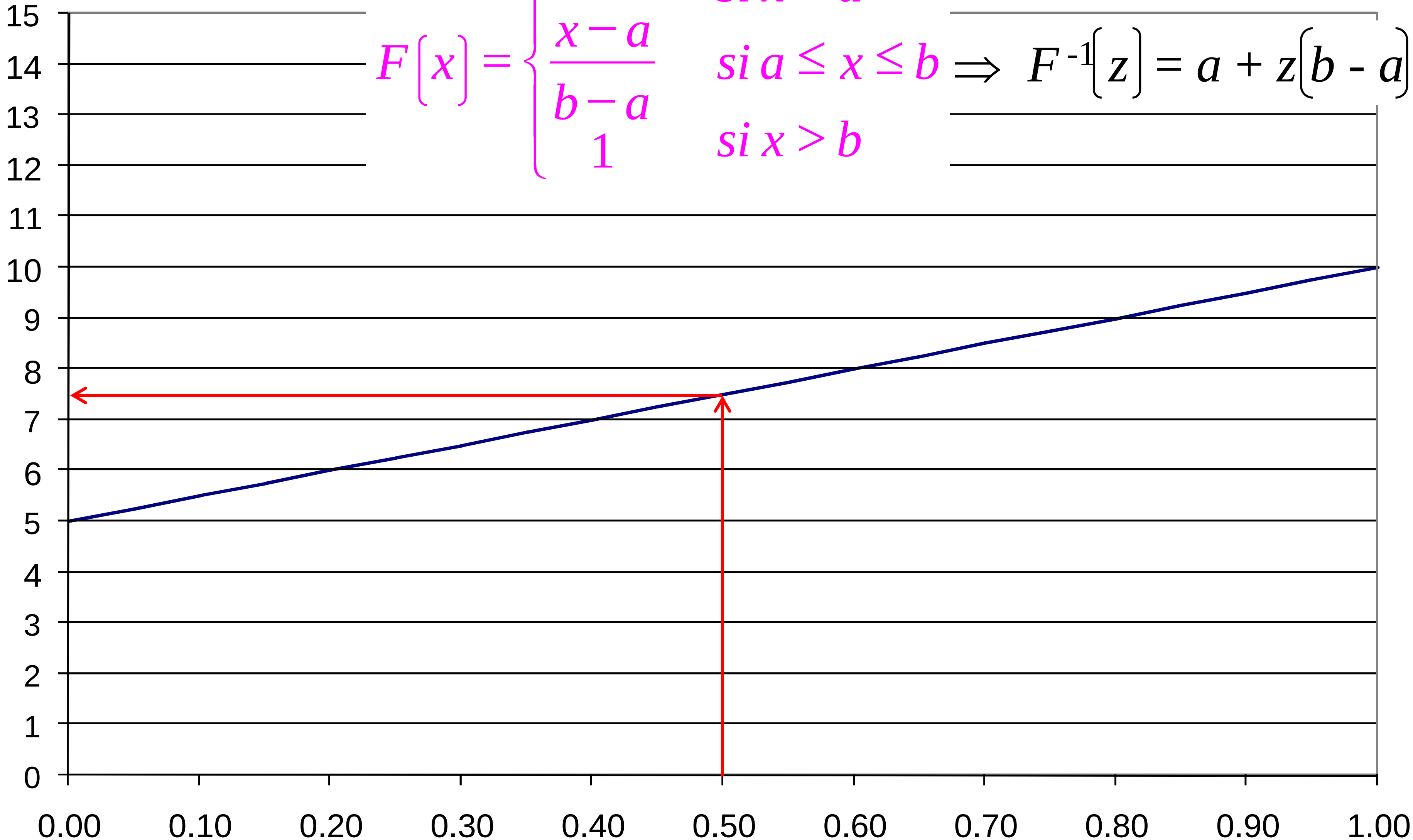


Nombres aléatoires et lois de probabilité

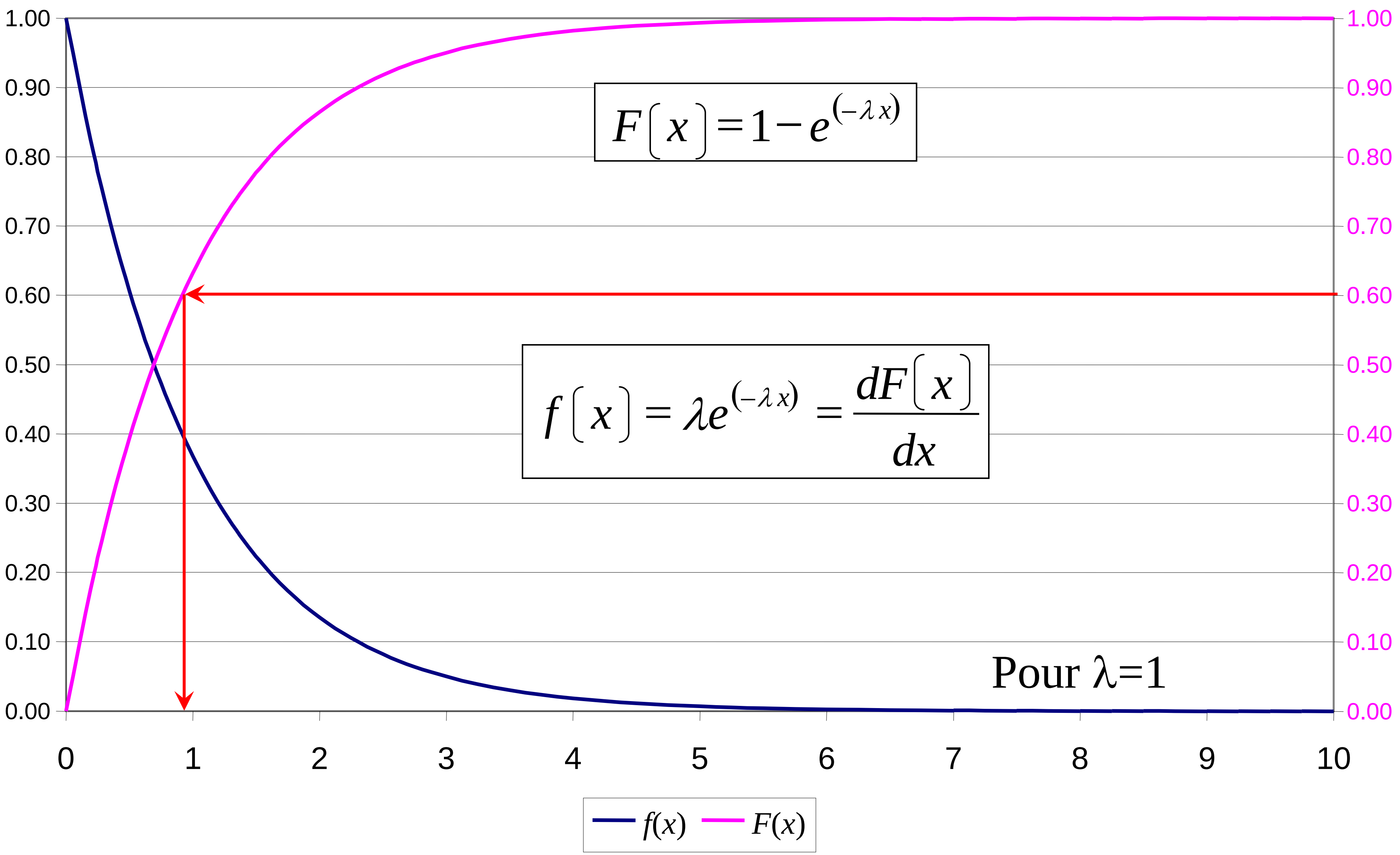


Nombres aléatoires et lois de probabilité

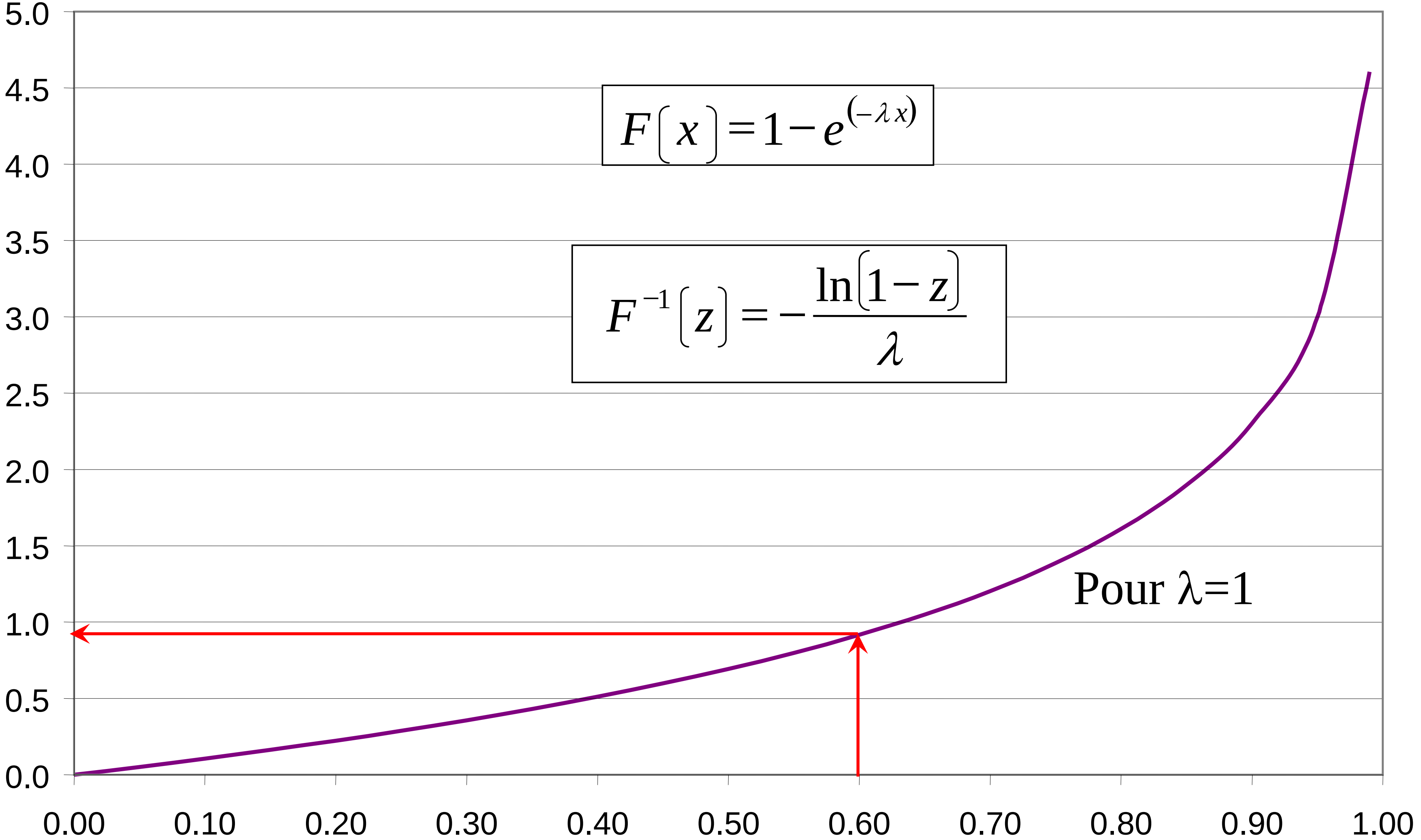
$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\; x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\; a \le x \le b \\ 1 & si\; x > b \end{cases} \Rightarrow F^{-1}(z) = a + z(b - a)$$



Nombres aléatoires et lois de probabilité

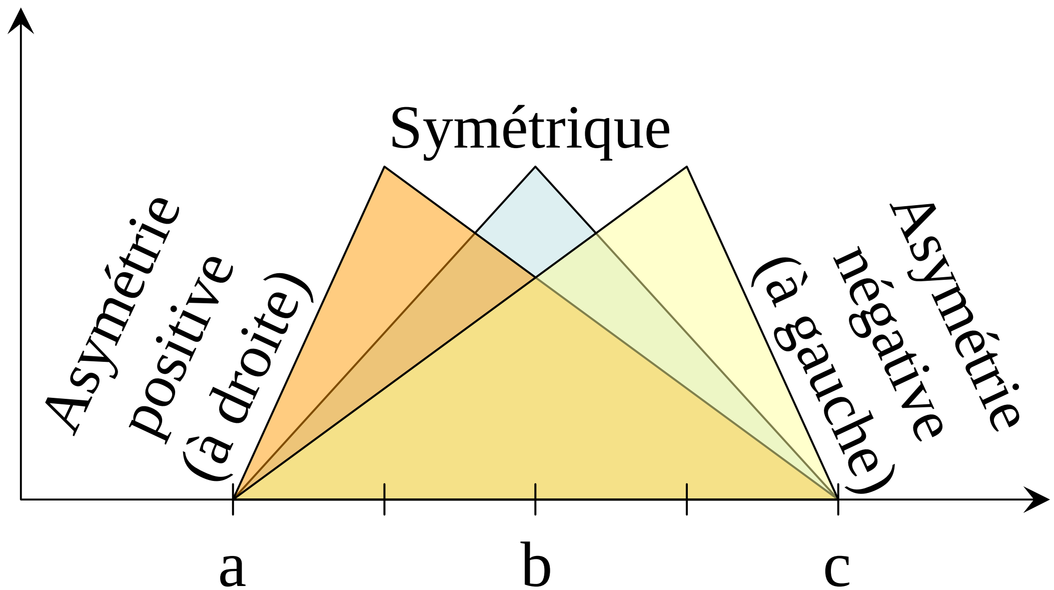


Nombres aléatoires et lois de probabilité



Nombres aléatoires et lois de probabilité

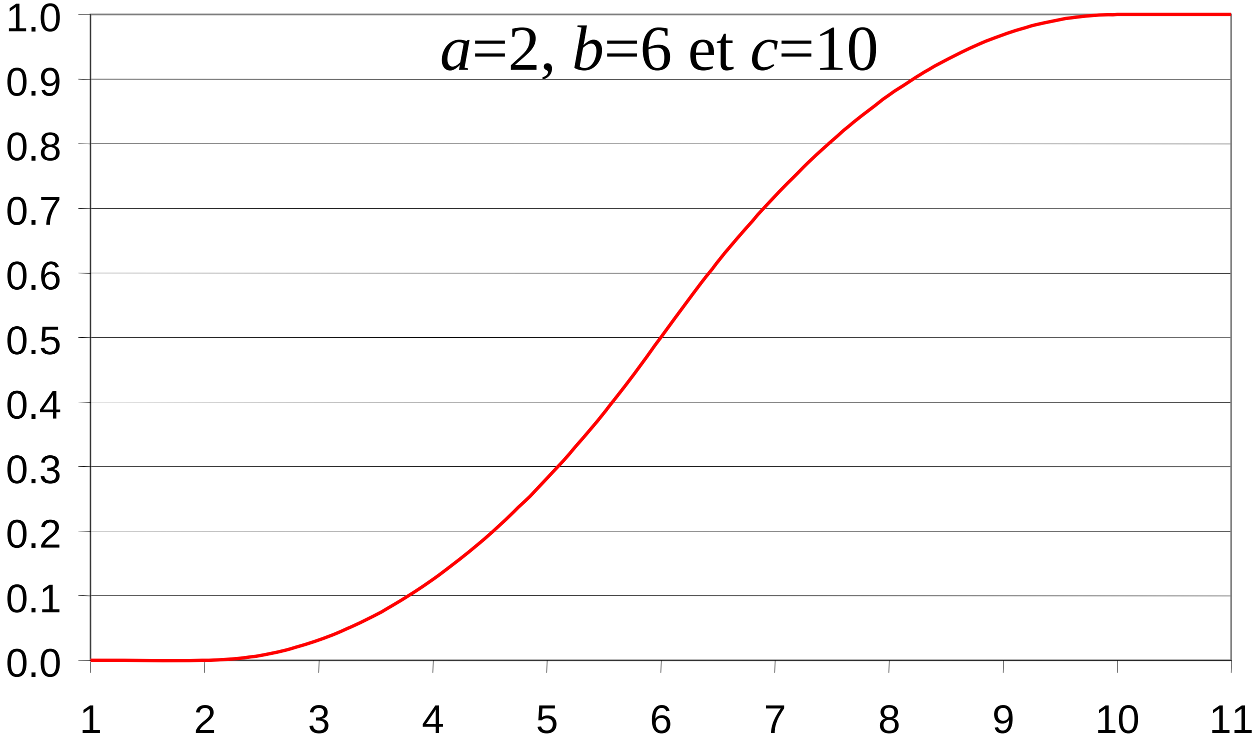
$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)} & \text{si } a \le x \le b \\ \dfrac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)} & \text{si } b < x \le c \\ 0 & \text{si } c < x \end{cases}$$



Nombres aléatoires et lois de probabilité

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{(x-a)^2}{(c-a)(b-a)} & \text{si } a \le x \le b \\ 1 - \dfrac{(c-x)^2}{(c-a)(c-b)} & \text{si } b < x \le c \\ 1 & \text{si } c < x \end{cases}$$

$$F(b) = \frac{(b-a)^2}{(c-a)(b-a)} = \frac{b-a}{c-a}$$



Nombres aléatoires et lois de probabilité

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<a \\ \dfrac{(x-a)^2}{(c-a)(b-a)} & \text{si } a\le x\le b \\ 1-\dfrac{(c-x)^2}{(c-a)(c-b)} & \text{si } b<x\le c \\ 1 & \text{si } c<x \end{cases}$$

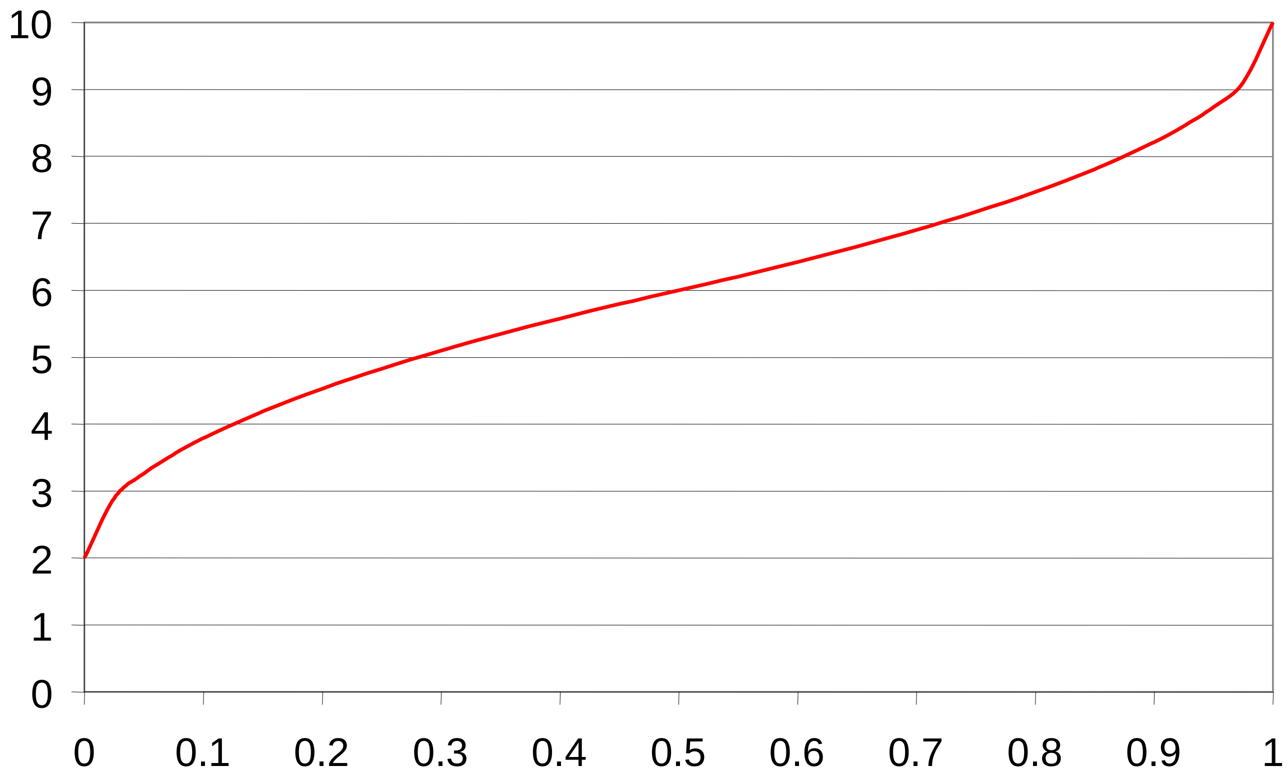
$$F(b)=\frac{(b-a)^2}{(c-a)(b-a)}=\frac{b-a}{c-a}$$

$$=z \quad \Rightarrow \quad x=a+\sqrt{z(c-a)(b-a)}$$

$$=z \quad \Rightarrow \quad x=c-\sqrt{(1-z)(c-a)(c-b)}$$

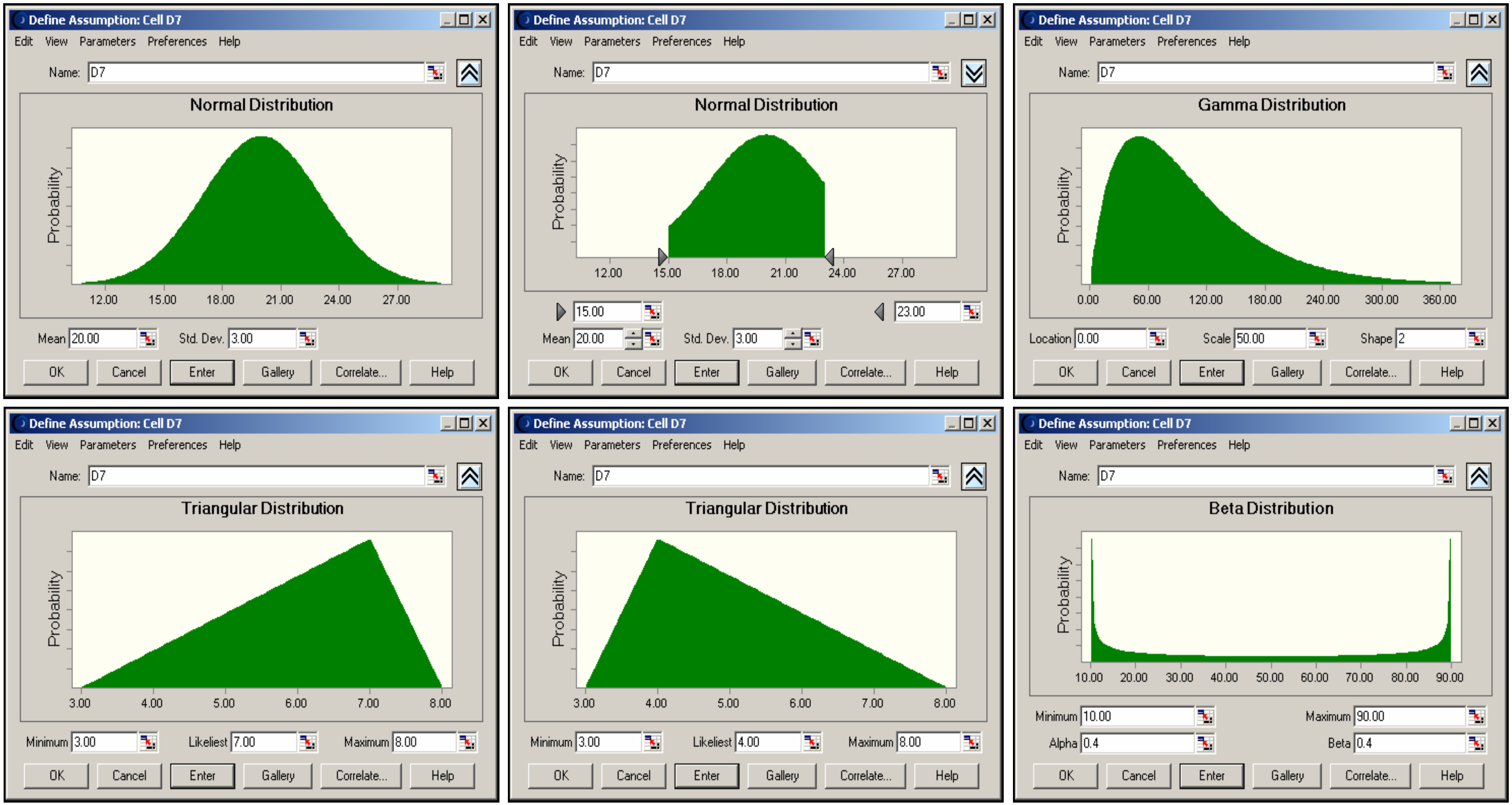
$$F^{-1}(z)=\begin{cases} a+\sqrt{z(c-a)(b-a)} & \text{si } 0\le z\le \dfrac{b-a}{c-a} \\ c-\sqrt{(1-z)(c-a)(c-b)} & \text{si } \dfrac{b-a}{c-a}<z\le 1 \end{cases}$$

Nombres aléatoires et lois de probabilité



$$F^{-1}(z) = \begin{cases} a + \sqrt{z(c-a)(b-a)} & \text{si } 0 \le z \le \dfrac{b-a}{c-a} \\ c - \sqrt{(1-z)(c-a)(c-b)} & \text{si } \dfrac{b-a}{c-a} < z \le 1 \end{cases}$$

Nombres aléatoires et lois de probabilité



Nombres aléatoires et lois de probabilité