CORRIGE DES EXERCICES : Lois normales

Exercice 1

Z variable quantitative normale centrée réduite. On note $Z \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma = 1)$ et F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) $P(Z \leq 1{,}07)=F(1{,}07)=0{,}8577$ ➨ 85,77% des valeurs de Z sont inférieures à 1,07.

2) $P(Z > 1{,}07)=1-P(Z \leq 1{,}07)=1-F(1{,}07)=1-0{,}8577=0{,}1423$ ➨ 14,23% des valeurs de Z sont supérieures à 1,07.

3) $P(Z \leq -1{,}07)=F(-1{,}07)=1-F(1{,}07)=1-0{,}8577=0{,}1423$ ou par symétrie de la densité de Z : $P(Z \leq -1{,}07) = P(Z > 1{,}07) = 0{,}1423$ ➨ 14,23% des valeurs de Z sont inférieures à −1,07.

4) $P(Z > -2{,}58) = 1-P(Z \leq -2{,}58)=1-F(-2{,}58)=1-(1-F(2{,}58))=F(2{,}58)=0{,}9951$ ou par symétrie de la densité de Z : $P(Z > -2{,}58) = P(Z \leq 2{,}58)=F(2{,}58)=0{,}9951$ ➨ 99,51% des valeurs de Z sont supérieures à −2,58.

5) $P(1{,}07 \leq Z < 2{,}58)=P(Z \leq 2{,}58)-P(Z \leq 1{,}07)=F(2{,}58)-F(1{,}07)=0{,}9951-0{,}8577=0{,}1374$
➨ 13,74% des valeurs de Z sont comprises entre 1,07 et 2,58.

6) $P(-2{,}76 \leq Z < 1{,}42)=P(Z \leq 1{,}42)-P(Z \leq -2{,}76)=0{,}9222-0{,}0029 = 0{,}9193$ car :
$P(Z \leq -2{,}76)=F(-2{,}76)=1-F(2{,}76)=1-0{,}9971=0{,}0029$ ➨ 91,93% des valeurs de Z sont comprises entre −2,76 et 1,42.

7) $P(-2{,}58 \leq Z < -1{,}75)=P(Z \leq -1{,}75)-P(Z \leq -2{,}58)=F(-1{,}75)-F(-2{,}58)=1-F(1{,}75)-(1-F(2{,}58))=F(2{,}58)-F(1{,}75)$ $=0{,}9951-0{,}9599=0{,}0352$.
(ou par symétrie de la densité de Z : $P(-2{,}58 \leq Z < -1{,}75)=P(1{,}75 \leq Z < 2{,}58)=F(2{,}58)-F(1{,}75)=0{,}9951-0{,}9599=0{,}0352$)
➨ 3,52% des valeurs de Z sont comprises entre −2,58 et −1,75

8) $P(Z \leq -1{,}84)+P(Z > -0{,}06)=F(-1{,}84)+1-P(Z \leq -0{,}06)=1-F(1{,}84)+1-(1-F(0{,}06))=1-F(1{,}84)+F(0{,}06))=1-0{,}9671+0{,}5239$ $=0{,}5568$ (ou par symétrie de la densité de Z : $P(Z > -0{,}06)=P(Z \leq 0{,}06)=F(0{,}06)=0{,}5239$)
➨ 55,68% des valeurs de Z sont inférieures à −1,84 ou supérieures à −0,06.

9) la médiane de Z est le quantile d'ordre 0,5 notée $z_{0,5}$ telle que $F(z_{0,5}) = 0{,}5$ donc $z_{0,5}=0$ (cf table).
le troisième quartile de Z est le quantile d'ordre 0,75 noté $z_{0,75}$ tel que $F(z_{0,75}) = 0{,}75$ donc (cf table) $z_{0,75}$ est compris entre 0,67 et 0,68 ; par convention on prendra soit l'une ou l'autre des deux valeurs, soit le milieu donc $z_{0,75} = 0{,}67$ ou $z_{0,75} = 0{,}68$ ou $z_{0,75} = 0{,}675$.
le premier quartile de Z est le quantile d'ordre 0,25 noté $z_{0,25}$ tel que $F(z_{0,25}) = 0{,}25$. Or $F(z_{0,75})=P(Z \leq z_{0,75})=0{,}75$ donc $P(Z > z_{0,75})=0{,}25= P(Z \leq -z_{0,75})$ d'où $z_{0,25} = -z_{0,75}$ donc $z_{0,25} = -0{,}67$ ou $z_{0,25} = -0{,}68$ ou $z_{0,25} = -0{,}675$.
➨ 50% des valeurs de Z sont inférieures à 0 (50% sont positives) 25% des valeurs de Z sont inférieures à −0,675 (75% sont supérieures à −0,675) et 75% des valeurs de Z sont inférieures à 0,675 (25% sont supérieures à 0,675).

10) le 8ème décile de Z est le quantile d'ordre 0,8 noté $z_{0,8}$ tel que $F(z_{0,8}) = 0{,}8$ donc (cf table) $z_{0,8}$ est compris entre 0,84 et 0,85 plutôt plus proche de 0,84 ; donc $z_{0,8} = 0{,}84$.
le 2ème décile de Z est le quantile d'ordre 0,2 noté $z_{0,2}$ tel que $F(z_{0,2}) = 0{,}2$. Or $F(z_{0,8})=P(Z \leq z_{0,8})=0{,}8$ donc $P(Z > z_{0,8})=0{,}2= P(Z \leq -z_{0,8})$ d'où $z_{0,2} = -z_{0,8} = -0{,}84$.
➨ 20% des valeurs de Z sont inférieures à −0,84 (80% sont supérieures à −0,84) et 80% des valeurs de Z sont inférieures à 0,84 (20% sont supérieures à 0,84).
le 9ème décile de Z est le quantile d'ordre 0,9 noté $z_{0,9}$ tel que $F(z_{0,9}) = 0{,}9$ donc (cf table) $z_{0,9}$ est compris entre 1,28 et 1,29 plutôt plus proche de 1,28 ; donc $z_{0,9} = 1{,}28$.
le 1er décile de Z est le quantile d'ordre 0,1 noté $z_{0,1}$ tel que $F(z_{0,1}) = 0{,}1$. Or $F(z_{0,9})=P(Z \leq z_{0,9})=0{,}9$ donc $P(Z > z_{0,9})=0{,}1= P(Z \leq -z_{0,9})$ d'où $z_{0,1} = -z_{0,9} = -1{,}28$.
➨ 10% des valeurs de Z sont inférieures à −1,28 (90% sont supérieures à −1,28) et 90% des valeurs de Z sont inférieures à 1,28 (10% sont supérieures à 1,28).

11) le 95ème percentile de Z est le quantile d'ordre 0,95 noté $z_{0,95}$ tel que $F(z_{0,95}) = 0{,}95$ donc (cf table) $z_{0,95}$ est compris entre 1,64 et 1,65 ; $z_{0,95} = 1{,}64$ ou $z_{0,95} = 1{,}65$ ou $z_{0,95} = 1{,}645$.
le 5ème percentile de Z est le quantile d'ordre 0,05 noté $z_{0,05}$ tel que $F(z_{0,05}) = 0{,}05$. Or $F(z_{0,95})=P(Z \leq z_{0,95})=0{,}95$ donc $P(Z > z_{0,95})=0{,}05= P(Z \leq -z_{0,95})$ d'où $z_{0,05} = -z_{0,95} = -1{,}64$ ou $z_{0,05} = -1{,}65$ ou $z_{0,05} = -1{,}645$.
➨ 5% des valeurs de Z sont inférieures à −1,645 (95% sont supérieures à −1,645) et 95% des valeurs de Z sont inférieures à 1,645 (5% sont supérieures à 1,645).
le 99ème percentile de Z est le quantile d'ordre 0,99 noté $z_{0,99}$ tel que $F(z_{0,99}) = 0{,}99$ donc (cf table) $z_{0,99}$ est compris entre 2,32 et 2,33 ; $z_{0,99} = 2{,}32$ ou $z_{0,99} = 2{,}33$ ou $z_{0,99} = 2{,}325$.
le 1er percentile de Z est le quantile d'ordre 0,01 noté $z_{0,01}$ tel que $F(z_{0,01}) = 0{,}01$. Or $F(z_{0,99})=P(Z \leq z_{0,99})=0{,}99$ donc $P(Z > z_{0,99})=0{,}01= P(Z \leq -z_{0,99})$ d'où $z_{0,01} = -z_{0,99} = -2{,}32$ ou $z_{0,01} = -2{,}33$ ou $z_{0,01} = -2{,}325$.
➨ 1% des valeurs de Z sont inférieures à −2,325 (99% sont supérieures à −2,325) et 99% des valeurs de Z sont inférieures à 2,325 (1% sont supérieures à 2,325).

12) le 77ème percentile de Z est le quantile d'ordre 0,77 noté $z_{0,77}$ tel que $F(z_{0,77})=0,77$ donc (cf table) $z_{0,77}$ est compris entre 0,73 et 0,74 plutôt plus proche de 0,74 ; donc $z_{0,77} = 0,74$

le 8ème percentile de Z est le quantile d'ordre 0,08 noté $z_{0,08}$ tel que $F(z_{0,08})=0,08$. Or $P(Z>z)=0,08$ c'est à dire $P(Z\leq z)=1-0,08=0,92$ si $z= z_{0,92}=1,40$ ou $z_{0,92}=1,41$ ou $z_{0,92}=1,405$ le 92ème percentile de Z donc $P(Z> z_{0,92})=0,08= P(Z\leq -z_{0,92})$ d'où $z_{0,08} = -z_{0,92} = -1,40$ ou $z_{0,08} = -1,41$ ou $z_{0,08} = -1,405$.

le 41ème percentile de Z est le quantile d'ordre 0,41 noté $z_{0,41}$ tel que $F(z_{0,41})=0,41$. Or $P(Z>z)=0,41$ c'est à dire $P(Z\leq z)=1-0,41=0,59$ si $z=z_{0,59}=0,23$ le 59ème percentile de Z donc $P(Z> z_{0,59})=0,41=P(Z\leq -z_{0,59})$ donc $z_{0,41}= -z_{0,59}= -0,23$.

13) le quantile d'ordre 97,5% (=0,975) noté $z_{0,975}$ tel que $F(z_{0,975})=0,975$ donc (cf table) $z_{0,975}=1,96$.

le quantile d'ordre 2,5% (=0,025) noté $z_{0,025}$ tel que $F(z_{0,025})=0,025$. Or $F(z_{0,975})=P(Z\leq z_{0,975})=0,975$ donc $P(Z> z_{0,975})=0,025= P(Z\leq -z_{0,975})$ donc $z_{0,025} = -z_{0,975} = -1,96$.

➡ 2,5% des valeurs de Z sont inférieures à −1,96 (97,5% sont supérieures à −1,96) et 97,5% des valeurs de Z sont inférieures à 1,96 (2,5% sont supérieures à 1,96).

le quantile d'ordre 99,5% (=0,995) noté $z_{0,995}$ tel que $F(z_{0,995})=0,995$ donc (cf table) $z_{0,995}$ est compris entre 2,57 et 2,58 ; $z_{0,995} = 2,57$ ou $z_{0,995} = 2,58$ ou $z_{0,995} = 2,575$.

le quantile d'ordre 0,5% (=0,005) noté $z_{0,005}$ tel que $F(z_{0,005})=0,005$. Or $F(z_{0,995})=P(Z\leq z_{0,995})=0,995$ donc $P(Z> z_{0,995})=0,005= P(Z\leq -z_{0,995})$ d'où $z_{0,005} = -z_{0,995} = -2,57$ ou $z_{0,005} = -2,58$ ou $z_{0,005} = -2,575$.

➡ 0,5% des valeurs de Z sont inférieures à −2,575 (99,5% sont supérieures à −2,575) et 99,5% des valeurs de Z sont inférieures à 2,575 (0,5% sont supérieures à 2,575).

14) C'est l'intervalle de variation au niveau 90% (au risque α=10%) de Z :

$I_{90\%}(Z) = [z_{0,05} ; z_{0,95}] = [-z_{0,95} ; z_{0,95}] = [\pm z_{0,95}] = [\pm 1,645]$ car $z_{1-(\alpha/2)} = z_{0,95}=1,645$ est le quantile d'ordre 0,95 de Z.

➡ 90% des valeurs de Z sont comprises entre −1,645 et 1,645.

15) Intervalle de variation au niveau 80% (au risque α=20%) de Z :

$I_{80\%}(Z) = [z_{0,1} ; z_{0,9}] = [-z_{0,9} ; z_{0,9}] = [\pm z_{0,9}] = [\pm 1,28]$ car $z_{1-(\alpha/2)} = z_{0,9}=1,28$ est le quantile d'ordre 0,9 de Z.

➡ 80% des valeurs de Z sont comprises entre −1,28 et 1,28.

16) Intervalle de variation au risque 5% (au niveau à 95%) de Z :

$I_{95\%}(Z) = [z_{0,025} ; z_{0,975}] = [-z_{0,975} ; z_{0,975}] = [\pm z_{0,975}] = [\pm 1,96]$ car $z_{1-(\alpha/2)} = z_{0,975}=1,96$ est le quantile d'ordre 0,975 de Z.

➡ 95% des valeurs de Z sont comprises entre −1,96 et 1,96.

17) Intervalle de variation à 99% (au risque α=1%) de Z :

$I_{99\%}(Z) = [z_{0,005} ; z_{0,995}] = [\pm z_{0,995}] = [\pm 2,575]$ car $z_{1-(\alpha/2)} = z_{0,995}=2,575$ est le quantile d'ordre 0,995 de Z.

➡ 99% des valeurs de Z sont comprises entre −2,575 et 2,575.

18) Intervalle de variation au risque 11% (au niveau à 89%) de Z :

$I_{89\%}(Z) = [z_{0,055} ; z_{0,945}] = [-z_{0,945} ; z_{0,945}] = [\pm z_{0,945}] = [\pm 1,6]$ car $z_{1-(\alpha/2)} = z_{0,945}=1,6$ est le quantile d'ordre 0,945 de Z.

➡ 89% des valeurs de Z sont comprises entre −1,6 et 1,6.

19) $P(Z\leq E)=0,15$ donc E est le quantile d'ordre 0,15 de Z noté $z_{0,15}$

$P(Z> A)=0,15$ donc $P(Z\leq A)=1-0,15=0,85$ c'est à dire que A est le quantile d'ordre 0,85 de Z noté $z_{0,85}$. D'après la table $z_{0,85}$ est compris entre 1,03 et 1,04 plutôt plus proche de 1,04 ; donc $z_{0,85} = 1,04=A$

On en déduit que E (symétrique de A par rapport à 0) est égal à $z_{0,15} = -z_{0,85} =-1,04=E$

$P(Z\leq D)=0,15+0,15=0,3$ donc D est le quantile d'ordre 0,3 de Z noté $z_{0,3}$

$P(Z> B)=0,15+0,15=0,3$ donc $P(Z\leq B)=1-0,3=0,7$ c'est à dire que B est le quantile d'ordre 0,7 de Z noté $z_{0,7}$. D'après la table $z_{0,7}$ est compris entre 0,52 et 0,53; donc $z_{0,7} = 0,525=B$

On en déduit que D (symétrique de B par rapport à 0) est égal à $z_{0,3} = -z_{0,6} =-0,525=D$

$P(Z\leq C)=0,15+0,15+0,2=0,5=P(Z> C)$ donc C est la médiane de Z notée $z_{0,5}=0=C$

Exercice 2

$\mathcal{P}$={enfants âgés de 7 ans}

X= quotient intellectuel QI, variable quantitative $X\sim\mathcal{N}(\mu=100, \sigma=10)$ dans $\mathcal{P}$. On note F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) a. $P(X \leq 106) = P\left(Z \leq \frac{106-100}{10}\right) = P(Z \leq 0,6) = F(0,6) = 0,7257$

➡ 72,57% des enfants de 7 ans ont un QI inférieur à 107, QI du premier enfant.

b. $P(X \leq 85) = P\left(Z \leq \frac{85-100}{10}\right) = P(Z \leq -1,5) = F(-1,5) = 1 - F(1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$

➡ 6,68% des enfants de 7 ans ont un QI inférieur à 85, QI du second enfant.

c. $P(85 \leq X \leq 106) = P(X \leq 106) - P(X \leq 85) = 0,7257 - 0,0668 = 0,6589$

➡ 65,89% des enfants de 7 ans ont un QI compris entre 85, QI du second enfant et 106, QI du premier enfant.

2) 95% des enfants de 7 ans ont un QI inférieur au QI cherché, c'est donc par définition le quantile d'ordre 0,95 de X :

$x_{0,95} = 100 + (10 \times z_{0,95}) = 100 + (10 \times 1,645) = 100 + 16,45 = 116,45$

car $z_{0,95}$=1,645 est le quantile d'ordre 0,95 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➨ 95% des enfants de 7 ans ont un QI inférieur à 116,45 (5% des enfants de 7 ans ont un QI supérieur à 116,45).

3) 5% des enfants de 7 ans ont un QI inférieur au QI cherché, c'est donc par définition le quantile d'ordre 0,05 de X :
$x_{0,05} = 100 + (10 \times z_{0,05}) = 100 - (10 \times z_{0,95}) = 100 - (10 \times 1,645) = 100 - 16,45 = 83,55$
car $z_{0,95}$=1,645 est le quantile d'ordre 0,95 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
➨ 5% des enfants de 7 ans ont un QI inférieur à 83,55 (95% des enfants de 7 ans ont un QI supérieur à 83,55).

4) Intervalle de variation à 95% (au risque α=5%) du QI dans $\mathcal{P}$:
$I_{95\%}(X) = [x_{0,025}; x_{0,975}] = [100 \pm 10 \times z_{0,975}] = [100 \pm 10 \times 1,96] = [100 \pm 19,6] = [80,4; 119,6]$
car $z_{1-(\alpha/2)}=z_{0,975}$=1,96 est le quantile d'ordre 0,975 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
➨ 95% des enfants de 7 ans ont un QI compris entre 80,4 et 119,6.

Exercice 3

$\mathcal{P}$={français du recensement de 1999}

X= âge, variable quantitative X~$\mathcal{N}(\mu=39, \sigma=23)$ dans $\mathcal{P}$. On note F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) $P(X \le 80) = P\left(Z \le \frac{80-39}{23}\right) \approx P(Z \le 1,7826) = F(1,7826) \approx F(1,78) = 0,9625$.
➨ 96,25% des français avaient moins de 80 ans au recensement de 1999.

2) $P(X > 80) = 1 - P(X \le 80) = 1 - 0,9625 = 0,0375$.
➨ 3,75% des français avaient plus de 80 ans au recensement de 1999.

3) $P(X \le 20) = P\left(Z \le \frac{20-39}{23}\right) = P(Z \le -0,826) = F(-0,826) \approx F(-0,83) = 1 - F(0,83) = 1 - 0,7967 = 0,2033$
➨ 20,33% des français avaient moins de 20 ans au recensement de 1999.

4) $P(20 \le X \le 60) = P(X \le 60) - P(X \le 20) = 0,8186 - 0,2033 = 0,6153$ car
$P(X \le 60) = P\left(Z \le \frac{60-39}{23}\right) = P(Z \le 0,913) = F(0,913) \approx F(0,91) = 0,8186$
➨ 61,53% des français avaient entre 20 et 60 ans au recensement de 1999.

5) On recherche la limite d'âge au dessus de laquelle se trouvent 5% des français les plus âgés au recensement de 1999, c'est à dire que 5% des français ont un âge supérieur à l'âge limite cherché, donc 95% des français ont un âge inférieur à l'âge limite cherché, qui est par définition le quantile d'ordre 0,95 de X :
$x_{0,95} = 39 + (23 \times z_{0,95}) = 39 + (23 \times 1,645) = 39 + 37,835 = 76,835 \approx 76,8$
car $z_{0,95}$=1,645 est le quantile d'ordre 0,95 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
➨ 95% des français ont un âge inférieur à 76,8 ans environ donc 5% des français ont plus de 76,8 ans environ.

6) On recherche la limite d'âge au dessous de laquelle se trouvent 10% des français les plus jeunes au recensement de 1999, c'est à dire que 10% des français ont un âge inférieur à l'âge limite cherché, qui est par définition le quantile d'ordre 0,1 de X :
$x_{0,1} = 39 + (23 \times z_{0,1}) = 39 - (23 \times z_{0,9}) = 39 - (23 \times 1,28) = 39 - 29,44 = 9,56 \approx 9,6$
car $z_{0,1} = -z_{0,9} = -1,28$ est le quantile d'ordre 0,1 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
➨ 10% des français ont un âge inférieur à 9,6 ans environ (90% des français ont plus de 9,6 ans environ).

7) Intervalle de variation à 90% (au risque α=10%) de l'âge dans $\mathcal{P}$:
$I_{90\%}(X) = [x_{0,05}; x_{0,95}] = [39 \pm 23 \times z_{0,95}] = [39 \pm 23 \times 1,645] = [39 \pm 37,835] = [1,165; 76,835] \approx [1,2; 76,8]$
car $z_{1-(\alpha/2)} = z_{0,95}$ =1,645 est le quantile d'ordre 0,95 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
➨ 90% des français ont un âge compris entre 1,2 et 76,8 ans environ.

Intervalle de variation à 95% (au risque α=5%) de l'âge dans $\mathcal{P}$:
$I_{95\%}(X) = [x_{0,025}; x_{0,975}] = [39 \pm 23 \times z_{0,975}] = [39 \pm 23 \times 1,96] = [39 \pm 45,08] \approx [-6; 84]$
car $z_{1-(\alpha/2)}=z_{0,975}$=1,96 est le quantile d'ordre 0,975 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
➨ la valeur négative de la borne inférieure de cet intervalle de variation à 95% permet de remettre en question l'hypothèse de normalité faite sur la variable âge, puisque l'on pourrait conclure que 95% des français ont entre –6 et 84 ans !

8) On recherche la limite d'âge au dessus de laquelle se trouvent 20% des français les plus âgés au recensement de 1999, c'est à dire que 80% des français ont un âge inférieur à l'âge de la retraite cherché, qui est par définition le quantile d'ordre 0,8 de X :
$x_{0,8} = 39 + (23 \times z_{0,8}) = 39 + (23 \times 0,84) = 39 + 19,32 = 58,32 \approx 58,3$
car $z_{0,8}$ = 0,84 est le quantile d'ordre 0,8 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
➨ l'âge de la retraite aurait dû être de 58,3 ans environ pour qu'il y ait eu 20% des français à la retraite en 1999.

Exercice 4

$\mathcal{P}$={enfants}

X= score au questionnaire d'auto-évaluation d'Achenbach, variable quantitative X~$\mathcal{N}(\mu=50, \sigma=10)$ dans $\mathcal{P}$. On note F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) $P(X \leq 74) = P\left(Z \leq \frac{74-50}{10}\right) = P(Z \leq 2{,}4) = F(2{,}4) = 0{,}9918$

➨ environ 99% des enfants ont un score inférieur à 74.

2) $P(X \leq 34) = P\left(Z \leq \frac{34-50}{10}\right) = P(Z \leq -1{,}6) = 1 - F(1{,}6) = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548$

➨ environ 5,5% des enfants ont un score inférieur à 34.

3) $P(20 \leq X \leq 74) = P(X \leq 74) - P(X \leq 20) = 0{,}9918 - 0{,}00135 = 0{,}99045$ car

$P(X \leq 20) = P\left(Z \leq \frac{20-50}{10}\right) = P(Z \leq -3) = 1 - F(3) = 1 - 0{,}99865 = 0{,}00135$

➨ environ 99% des enfants ont un score compris entre 20 et 74.

4) 2% des enfants ont un score supérieur au score cherché, donc 98% des enfants ont un score inférieur au score cherché c'est donc par définition le quantile d'ordre 0,98 de X :

$x_{0,98} = 50 + (10 \times z_{0,98}) = 50 + (10 \times 2{,}055) = 50 + 20{,}55 = 70{,}55$

car $z_{0,98}$=2,055 est le quantile d'ordre 0,98 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➨ 98% des enfants ont un score inférieur à 70,55 donc 2% des enfants ont un score supérieur à 70,55.

5) C'est l'intervalle de variation à 90% (au risque α=10%) du score dans $\mathcal{P}$:

$I_{90\%}(X) = [x_{0,05}; x_{0,95}] = [50 \pm 10 \times z_{0,95}] = [50 \pm 10 \times 1{,}645] = [50 \pm 16{,}45] = [33{,}55 ; 66{,}45]$

car $z_{1-(\alpha/2)}=z_{0,95}$=1,645 est le quantile d'ordre 0,95 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➨ 90% des enfants ont un score compris entre 33,55 et 66,45.

6) Chaque classe contient 20% des scores donc
- la première classe contient les 20% des scores les plus faibles donc A est le quantile d'ordre 20% de X : A= $x_{0,2}$
- la seconde classe contient les 20% des scores suivants donc B est le quantile d'ordre 40% de X : B= $x_{0,4}$
- la troisième classe contient les 20% des scores suivants donc C est le quantile d'ordre 60% de X : C= $x_{0,6}$
- la quatrième classe contient les 20% des scores suivants donc D est le quantile d'ordre 80% de X : D= $x_{0,8}$
- la cinquième (dernière) classe contiendra donc les 20% des scores les plus élevés.

$D = x_{0,8} = 50 + (10 \times z_{0,8}) = 50 + (10 \times 0{,}84) = 50 + 8{,}4 = 58{,}4$ car $z_{0,8}$=0,84 est le quantile d'ordre 0,8 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$C = x_{0,6} = 50 + (10 \times z_{0,6}) = 50 + (10 \times 0{,}25) = 50 + 2{,}5 = 52{,}5$ car $z_{0,6}$=0,25 est le quantile d'ordre 0,6 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

d'où A, symétrique de D par rapport à μ=50 : $A = x_{0,2} = 50 - (10 \times z_{0,8}) = 50 - (10 \times 0{,}84) = 50 - 8{,}4 = 41{,}6$

et B, symétrique de C par rapport à μ=50 : $B = x_{0,4} = 50 - (10 \times z_{0,6}) = 50 - (10 \times 0{,}25) = 50 - 2{,}5 = 47{,}5$

classe 1 : scores inférieurs à 41,6
classe 2 : scores compris entre 41,6 et 47,5
classe 3 : scores compris entre 47,5 et 52,5
classe 4 : scores compris entre 52,5 et 58,4
classe 5 : scores supérieurs à 58,4

Exercice 5

$\mathcal{P}$={fumeurs}

X= score au test de dépendance tabagique de Fagerström, variable quantitative X~$\mathcal{N}(\mu=5, \sigma=4{,}5)$ dans $\mathcal{P}$. On note F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) $P(X \leq 6) = P\left(Z \leq \frac{6-5}{4{,}5}\right) = P(Z \leq 0{,}22) = F(0{,}22) = 0{,}5871$

➨ environ 59% des fumeurs ont un score inférieur à 6.

2) Les fumeurs dépendant à la nicotine ont un score compris entre 3 et 6 donc la proportion correspondante

$P(3 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = 0{,}5871 - 0{,}33 = 0{,}2571$ car

$P(X \leq 3) = P\left(Z \leq \frac{3-5}{4{,}5}\right) = P(Z \leq -0{,}44) = 1 - F(0{,}44) = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$

➨ environ 26% des fumeurs sont dépendant à la nicotine.

3) Les fumeurs très fortement dépendant à la nicotine ont un score supérieur à 9 donc la proportion correspondante

$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9-5}{4{,}5}\right) = 1 - P(Z \leq 0{,}89) = 1 - F(0{,}89) = 1 - 0{,}8133 = 0{,}1867$

➨ environ 19% des fumeurs sont très fortement dépendant à la nicotine.

4) 10% des fumeurs ont un score supérieur au score cherché, donc 90% des fumeurs ont un score inférieur au score cherché c'est donc par définition le quantile d'ordre 0,9 de X :

$x_{0,9} = 5 + (4{,}5 \times z_{0,9}) = 5 + (4{,}5 \times 1{,}28) = 5 + 5{,}76 = 10{,}76$ car $z_{0,9}$=1,28 est le quantile d'ordre 0,9 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➨ 90% des fumeurs ont un score inférieur à 10,76 donc 10% des fumeurs ont un score supérieur à 10,76.

5) L'intervalle de variation au risque α=20% (au niveau 80%) du score dans $\mathcal{P}$:

$I_{80\%}(X) = [x_{0,1}; x_{0,9}] = [5 \pm 4{,}5 \times z_{0,9}] = [5 \pm 4{,}5 \times 1{,}28] = [5 \pm 5{,}76] = [-0{,}76; 10{,}76]$

car $z_{1-(\alpha/2)}=z_{0,9}$=1,28 est le quantile d'ordre 0,9 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➨ la valeur négative de la borne inférieure de cet intervalle de variation à 80% peut faire douter de l'hypothèse de normalité faite sur la variable score, puisque l'on pourrait conclure que 80% des fumeurs ont un score compris entre –0,76 et 10,76 : or a priori, un score doit être positif ou nul.

6) Chaque classe contient 25% des scores donc
- la première classe contient les 25% des scores les plus faibles donc A est le 1er quartile de X : A= $x_{0,25}$
- la seconde classe contient les 25% des scores suivants donc B est la médiane de X : B= $x_{0,5} = \mu = 5$
- la troisième classe contient les 25% des scores suivants donc C est le 3ème quartile de X : C= $x_{0,75}$
- la quatrième (dernière) classe contiendra donc les 25% des scores les plus élevés.

$C = x_{0,75} = 5 + (4{,}5 \times z_{0,75}) = 5 + (4{,}75 \times 0{,}67) = 5 + 3{,}0375 = 8{,}0375 \approx 8$ car $z_{0,6}$=0,675 est le 3ème quartile de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

d'où A, symétrique de C par rapport à μ=50 : $A = x_{0,25} = 5 - (4{,}5 \times z_{0,75}) = 5 - 3{,}0375 = 1{,}9625 \approx 2$

classe 1 : scores inférieurs à 2
classe 2 : scores compris entre 2 et 5
classe 3 : scores compris entre 5 et 8
classe 4 : scores supérieurs à 8

Exercice 6

$\mathcal{P}$={personnes}

X= score à un inventaire d'estime de soi, variable quantitative X~$\mathcal{N}(\mu=32, \sigma=14)$ dans $\mathcal{P}$. On note F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) $P(X \le 50) = P\left(Z \le \frac{50-32}{14}\right) = P(Z \le 1{,}29) = F(1{,}29) = 0{,}9015$

➨ environ 90% des personnes ont un score inférieur à 50.

2) $P(X \ge 20) = 1 - P(X \le 20) = 1 - P\left(Z \le \frac{20-32}{14}\right) = 1 - P(Z \le -0{,}86) = 1 - F(-0{,}86) = 1 - (1 - F(-0{,}86)) = F(0{,}86) = 0{,}8051$

➨ environ 80,5% des personnes ont un score supérieur à 20.

3) 90% des personnes ont un score inférieur au score cherché c'est donc par définition le quantile d'ordre 0,9 de X :

$x_{0,9} = 32 + (14 \times z_{0,9}) = 32 + (14 \times 1{,}28) = 32 + 17{,}92 = 49{,}92$ car $z_{0,9}$=1,28 est le quantile d'ordre 0,9 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➨ 90% des personnes ont un score inférieur à 49,92 (10% des personnes ont un score supérieur à 49,92).

4) 10% des personnes ont un score inférieur au score cherché c'est donc par définition le quantile d'ordre 0,1 de X :

$x_{0,1} = 32 - (14 \times z_{0,9}) = 32 - 17{,}92 = 14{,}08$ symétrique de $x_{0,9}$ par rapport à μ =32

➨ 10% des personnes ont un score inférieur à 14,08 (90% des personnes ont un score supérieur à 14,08).

5) C'est l'intervalle de variation à 80% (au risque α=20%) du score dans $\mathcal{P}$:

$I_{80\%}(X) = [x_{0,1}; x_{0,9}] = [14{,}08; 49{,}92]$ ➨ 80% des personnes ont un score compris entre 14,08 et 49,92.

6) Les cinq classes sont définies par :
- la classe 5 contient les 10% des scores les plus élevés donc sa borne est le quantile d'ordre 0,9 de X : $x_{0,9}$= 49,92
- la classe 4 contient les 20% des scores suivants donc sa borne est le quantile d'ordre 0,7 de X : $x_{0,7}$
- la classe 3 contient les 40% des scores suivants donc sa borne est le quantile d'ordre 0,3 de X : $x_{0,3}$
- la classe 2 contient les 20% des scores suivants donc sa borne est le quantile d'ordre 0,1 de X : $x_{0,1}$= 14,08
- la (dernière) classe 1 contiendra donc les 10% des scores les plus faibles.

$x_{0,7} = 32 + (14 \times z_{0,7}) = 32 + (14 \times 0{,}52) = 32 + 7{,}28 = 39{,}28$ car $z_{0,7}$=0,52 est le quantile d'ordre 0,7 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

d'où $x_{0,3}$ symétrique de $x_{0,7}$ par rapport à μ=32 : $x_{0,3} = 32 - (14 \times z_{0,7}) = 32 - 7{,}28 = 24{,}72$

classe 1 : scores inférieurs à 14,08
classe 2 : scores compris entre 14,08 et 24,72
classe 3 : scores compris entre 24,72 et 39,28
classe 4 : scores compris entre 39,28 et 49,92
classe 5 : scores supérieurs à 49,92

Exercice 7

$\mathcal{P}$={enfants de grandes sections d'une école maternelle}

X= résultat au test de Boëhm-R, variable quantitative $X \sim \mathcal{N}(\mu = 60, \sigma = 17)$ dans $\mathcal{P}$. On note F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) $P(X \le 70) = P\left(Z \le \frac{70-60}{17}\right) = P(Z \le 0{,}59) = F(0{,}59) = 0{,}7224$

➨ environ 72% des enfants de grandes sections ont un résultat inférieur à 70.

2) $P(X \le 30) = P\left(Z \le \frac{30-60}{17}\right) = P(Z \le -1{,}76) = F(-1{,}76) = 1 - F(1{,}76) = 1 - 0{,}9608 = 0{,}0392$

➨ environ 4% des enfants de grandes sections ont un résultat inférieur à 30.

3) La proportion d'enfants de grandes sections admis en CP serait :

$$P(X > 40) = 1 - P(X \le 40) = 1 - P\left(Z \le \frac{40-60}{17}\right) = 1 - P(Z \le -1{,}18) = 1 - F(-1{,}18) = 1 - (1 - F(1{,}18)) = F(1{,}18) = 0{,}8810$$

➨ environ 88% des enfants de grandes sections ont un résultat supérieur à 40, seraient donc admis en CP.

4) 99% des enfants ont un résultat supérieur au résultat minimum requis, donc 1% des enfants ont un résultat inférieur au le résultat minimum requis c'est donc par définition le quantile d'ordre 0,01 (1^{er} percentile) de X :

$$x_{0,01} = 60 + (17 \times z_{0,01}) = 60 - (17 \times z_{0,99}) = 60 - (17 \times 2{,}325) = 60 - 39{,}525 = 20{,}475$$

car $z_{0,99}$=2,325 est le quantile d'ordre 0,99 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➨ 99% des enfants ont un résultat inférieur à 20,475 résultat minimum requis pour passer au CP (1% des enfants ont un résultat inférieur à 20,475 et ne sont pas admis au CP).

5) l'intervalle de variation au risque α=1% (à 99%) du résultat dans $\mathcal{P}$:

$$I_{99\%}(X) = [x_{0,005}; x_{0,995}] = [60 \pm 17 \times z_{0,995}] = [60 \pm 17 \times 2{,}575] = [60 \pm 43{,}775] = [16{,}225; 103{,}775]$$

car $z_{1-(\alpha/2)} = z_{0,995}$=2,575 est le quantile d'ordre 0,995 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➨ 99% des enfants ont un résultat compris entre 16,225 et 103,775.

6) Chaque classe contient un tiers des résultats donc :
- la première classe contient les 33,3% des résultats les plus faibles donc sa borne est le quantile d'ordre 33% de X : $x_{0,33}$
- la seconde classe contient les 33,3% des résultats suivants donc sa borne est le quantile d'ordre 67% de X : $x_{0,67}$
- la troisième (dernière) classe contiendra donc les 33,3% des résultats les plus élevés.

$x_{0,67} = 60 + (17 \times z_{0,67}) = 60 + (17 \times 0{,}44) = 60 + 7{,}48 = 67{,}48$ car $z_{0,67}$=0,44 est le quantile d'ordre 0,67 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

d'où $x_{0,33}$ symétrique de $x_{0,67}$ par rapport à μ=60 : $x_{0,33} = 60 - (17 \times z_{0,67}) = 60 - (17 \times 0{,}44) = 60 - 7{,}48 = 52{,}52$

classe 1 concepts non maîtrisés : résultats inférieurs à 52,52
classe 2 concepts en cours d'acquisition : résultats compris entre 52,52 et 67,48
classe 3 concepts maîtrisés : résultats supérieurs à 67,48

Exercice 8

$\mathcal{P}$={personnes}

X= score sur l'échelle CES-D, variable quantitative $X \sim \mathcal{N}(\mu = 12, \sigma = 4)$ dans $\mathcal{P}$. On note F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) a. Les personnes n'ayant pas un risque élevé de dépression ont un score inférieur à 17 donc la proportion correspondante

$$P(X \le 17) = P\left(Z \le \frac{17-12}{4}\right) = P(Z \le 1{,}25) = F(1{,}25) = 0{,}8944$$

➨ environ 89,5% des personnes ont un score CES-D inférieur à 17 donc n'ont pas un risque élevé de dépression.

b. Les personnes ayant un risque élevé de dépression ont un score supérieur à 17 donc la proportion correspondante $P(X>17) = 1-P(X\le 17) = 1-0{,}8944 = 0{,}1056$

➨ environ 10,5% des personnes ont un score CES-D supérieur à 17 donc ont un risque élevé de dépression.

2) $P(X \le 10) = P\left(Z \le \frac{10-12}{4}\right) = P(Z \le -0{,}5) = F(-0{,}5) = 1 - F(0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

➨ environ 31% des personnes ont un score CES-D inférieur à 10.

3) 10% des personnes ont un score CES-D supérieur au score cherché, donc 90% des personnes ont un score inférieur au score cherché c'est donc par définition le quantile d'ordre 0,9 de X (on peut déduire du résultat de la question 1.a que le score cherché est supérieur et proche de 17) :

$x_{0,9} = 12 + (4 \times z_{0,9}) = 12 + (4 \times 1{,}28) = 12 + 5{,}12 = 17{,}12$ car $z_{0,9}$=1,28 est le quantile d'ordre 0,9 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➨ 90% des personnes ont un score CES-D inférieur à 17,12 donc 10% des personnes ont un score supérieur à 17,12 score CES-D à partir duquel on considère que le risque de dépression est élevé.

4) 95% des personnes ont un score inférieur au score cherché c'est donc par définition le quantile d'ordre 0,95 de X (on peut déduire du résultat de la question 1.a que le score cherché est supérieur à 17) :

$x_{0,95} = 12 + (4 \times z_{0,95}) = 12 + (4 \times 1{,}645) = 12 + 6{,}58 = 18{,}58$ car $z_{0,95}$=1,645 est le quantile d'ordre 0,95 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➨ 95% des personnes ont un score CES-D inférieur à 18,58 (5% des personnes ont un score supérieur à 18,58).

5) L'intervalle de variation au risque α=5% (au niveau 95%) du score CES-D dans $\mathcal{P}$:

$I_{95\%}(X) = [x_{0,025}\,; x_{0,975}] = [12 \pm 4 \times z_{0,975}] = [12 \pm 4 \times 1{,}96] = [12 \pm 7{,}84] = [4{,}16; 19{,}84]$

car $z_{1-(\alpha/2)}$=$z_{0,975}$=1,96 est le quantile d'ordre 0,975 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➨ 95% des personnes ont un score CES-D compris entre 4,16 et 19,84.

Exercice 9

$\mathcal{P}$={sujets}

X= score à un inventaire d'évaluation de l'humeur, variable quantitative X~$\mathcal{N}(\mu=8, \sigma=2)$ dans $\mathcal{P}$. On note F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) $P(X \le 10) = P\left(Z \le \frac{10-8}{2}\right) = P(Z \le 1) = F(1) = 0{,}8413$

➨ environ 84% des sujets ont un score inférieur à 10.

2) $P(X \le 3) = P\left(Z \le \frac{3-8}{2}\right) = P(Z \le -2{,}5) = F(-2{,}5) = 1 - F(2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$

➨ environ 0,6% des sujets ont un score inférieur à 3.

3) $P(3 \le X \le 12) = P(X \le 12) - P(X \le 3) = 0{,}9772 - 0{,}0062 = 0{,}971$ car

$P(X \le 12) = P\left(Z \le \frac{12-8}{2}\right) = P(Z \le 2) = F(2) = 0{,}9772$

➨ environ 97% des sujets ont un score compris entre 3 et 12.

4) Les quatre bornes A, B, C et D sont définies par :
- 10% des scores sont inférieurs à B donc B est le quantile d'ordre 0,1 de X : B= $x_{0,1}$
- 30% des scores sont inférieurs à D donc D est le quantile d'ordre 0,3 de X : D= $x_{0,3}$
- 10% des scores sont supérieurs à A, 90% sont inférieurs à A donc A est le quantile d'ordre 0,9 de X : A= $x_{0,9}$
- 30% des scores sont supérieurs à C, 70% sont inférieurs à C donc C est le quantile d'ordre 0,7 de X : C= $x_{0,7}$

$A = x_{0,9} = 8 + (2 \times z_{0,9}) = 8 + (2 \times 1{,}28) = 8 + 2{,}56 = 10{,}56$ car $z_{0,9}$=1,28 est le quantile d'ordre 0,9 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

$C = x_{0,7} = 8 + (2 \times z_{0,7}) = 8 + (2 \times 0{,}525) = 8 + 1{,}05 = 9{,}05$ car $z_{0,7}$=0,525 est le quantile d'ordre 0,7 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

d'où B, symétrique de A par rapport à μ=8 : $B = x_{0,1} = 8 - (2 \times z_{0,9}) = 8 - 2{,}56 = 5{,}44$ et D, symétrique de C par rapport à μ=8 : $D = x_{0,3} = 8 - (2 \times z_{0,7}) = 8 - 1{,}05 = 6{,}95$

classe 1 : scores inférieurs à B=5,44
classe 2 : scores compris entre B=5,44 et D=6,95
classe 3 : scores compris entre D=6,95 et C=9,05
classe 4 : scores compris entre C=9,05 et A=10,56
classe 5 : scores supérieurs à A=10,56

5) L'intervalle de variation à 95% (au risque α=5%) du score dans $\mathcal{P}$:

$I_{95\%}(X) = [x_{0,025}\,; x_{0,975}] = [8 \pm 2 \times z_{0,975}] = [8 \pm 2 \times 1{,}96] = [8 \pm 3{,}92] = [4{,}08; 11{,}92]$

car $z_{1-(\alpha/2)}$=$z_{0,975}$=1,96 est le quantile d'ordre 0,975 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➨ 95% des sujets ont un score compris entre 4,08 et 11,92.

Exercice 10

$\mathcal{P}$={enfants âgés de 16 à 30 mois}

X= score sur l'échelle de Bayley, variable quantitative X~$\mathcal{N}(\mu=100, \sigma=14)$ dans $\mathcal{P}$. On note F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) $P(X \le 118) = P\left(Z \le \frac{118-100}{14}\right) = P(Z \le 1{,}29) = F(1{,}29) = 0{,}9015$

➨ environ 90% des enfants ont un score inférieur à 118, score du premier enfant.

2) $P(X \le 62) = P\left(Z \le \frac{62-100}{14}\right) = P(Z \le -2{,}71) = F(-2{,}71) = 1 - F(2{,}71) = 1 - 0{,}9966 = 0{,}0034$

➨ environ 0,3% des enfants ont un score inférieur à 62, score du second enfant.

3) $P(62 \le X \le 118) = P(X \le 118) - P(X \le 62) = 0{,}9015 - 0{,}0034 = 0{,}8981$

➨ 89,81% des enfants ont un score compris entre 62, score du second enfant et 118, score du premier enfant.

4) $P(X>159)=1-P(X\leq 159)=1-P\left(Z\leq \frac{159-100}{14}\right)=1-P(Z\leq 4{,}21)=1-F(4{,}21)\approx 1-0{,}999987=0{,}000013$

➡ très peu d'enfants ont un score supérieur à 159, score du troisième enfant.

5) 0,1% (=0,001) des enfants ont un score inférieur au score cherché, c'est donc par définition le quantile d'ordre 0,001 de X : $x_{0,001}=100+(14\times z_{0,001})=100-(14\times z_{0,999})=100-(14\times 3{,}1)=100-43{,}4=56{,}6$

car $z_{0,999}$=3,1 est le quantile d'ordre 0,999 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➡ 0,1% des enfants ont un score inférieur à 56,6 (99,9% des enfants ont un score supérieur à 56,6) score au dessous duquel on considérerait que le développement est retardé.

6) Intervalle de variation au risque α=2% (à 98%) du score dans $\mathcal{P}$:

$I_{98\%}(X)=[x_{0,01}\,;x_{0,9}]=[100\pm 14\times z_{0,9}]=[100\pm 14\times 2{,}325]=[100\pm 32{,}55]=[67{,}45\,;132{,}55]$

car $z_{1-(\alpha/2)}=z_{0,9}$=2,325 est le quantile d'ordre 0,9 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

➡ 98% des enfants ont un score compris entre 67,45 et 132,55.

7) Chaque classe contient 20% des scores donc :
- la première classe contient les 20% des scores les plus faibles donc A est le quantile d'ordre 20% de X : A= $x_{0,2}$
- la seconde classe contient les 20% des scores suivants donc B est le quantile d'ordre 40% de X : B= $x_{0,4}$
- la troisième classe contient les 20% des scores suivants donc C est le quantile d'ordre 60% de X : C= $x_{0,6}$
- la quatrième classe contient les 20% des scores suivants donc D est le quantile d'ordre 80% de X : D= $x_{0,8}$
- la cinquième (dernière) classe contiendra donc les 20% des scores les plus élevés.

$D=x_{0,8}=100+(14\times z_{0,8})=100+(14\times 0{,}84)=100+11{,}76=111{,}76$ car $z_{0,8}$=0,84 est le quantile d'ordre 0,8 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ d'où A, symétrique de D par rapport à μ=100 : $A=x_{0,2}=100-(14\times z_{0,8})=100-11{,}76=88{,}24$

$C=x_{0,6}=100+(14\times z_{0,6})=100+(14\times 0{,}25)=100+3{,}5=103{,}5$ car $z_{0,6}$=0,25 est le quantile d'ordre 0,6 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et B, symétrique de C par rapport à μ=100 : $B=x_{0,4}=100-(14\times z_{0,6})=100-(14\times 0{,}25)=100-3{,}5=96{,}5$

classe 1 : scores inférieurs à 88,24
classe 2 : scores compris entre 88,24 et 96,5
classe 3 : scores compris entre 96,5 et 103,5
classe 4 : scores compris entre 103,5 et 111,76
classe 5 : scores supérieurs à 111,76