Les plans d'expériences (Design of Experiments)

AC

Facteurs=attributs
Réponses=choix des individus

Collecte des données → Utilisation de plans expérimentaux pour sélectionner les combinaisons de produits

Facteurs=variables possédant au moins deux valeurs (**niveaux**)

Des « expériences » sont menées pour étudier les effets des niveaux des facteurs sur les « **réponses** » (variable dépendante).

Les plans d'expériences (Design of Experiments)

Forme		**Phosphate**		**Marque**		**Individus**	
Liquide	*Poudre*	*Sans*	*Avec*	α	β	I_1	I_2
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0					2	2
1	0					5	3
1	0	0	1	0	1	6	4
0	1	1			0	3	7
0	1	1			1	4	5
0	1	0			0	7	8
0	1	0	1	0	1	8	6

Plan factoriel complet

Plan factoriel fractionnaire

Fractional Factorial Design : a factorial design in which a fraction of the treatment combinations required for the complete factorial experiment is selected to be run.

Orthogonal Designs : a design in which all pairs of factors at specific levels appear together an equal number of times.

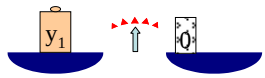
Les plans d'expériences
Illustration de l'intérêt.

- Balance de Roberval

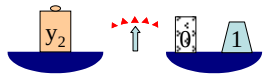
Un premier exemple.

- 4 pesées autorisées.
- 3 objets à peser : 1, 2, 3 (Poids P_1, P_2, P_3)…
- … avec une erreur minimale…
- … et en tenant compte de la tare : 0

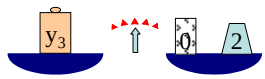
Récapitulatif : Plan A (4 pesées)

Pesée n°1 

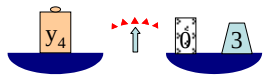
$y_1=p_0$

Pesée n°2 

$y_2=p_0+p_1$

Pesée n°3 

$y_3=p_0+p_2$

Pesée n°4 

$y_4=p_0+p_3$

Matrice des essais

Essai	Poids	Tare 0	Objet 1	Objet 2	Objet 3
1	y_1	1	0	0	0
2	y_2	1	1	0	0
3	y_3	1	0	1	0
4	y_4	1	0	0	1

Récapitulatif : Plan A (4 pesées)

- Calculs des poids

$y_1=p_0$
$y_2=p_0+p_1$
$y_3=p_0+p_2$
$y_4=p_0+p_3$

Solution :

$p_0=y_1$
$p_1=y_2-y_1$
$p_2=y_3-y_1$
$p_3=y_4-y_1$

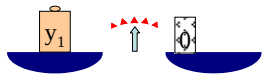
- Calcul de l'erreur

Pour $i\geq 1$ $Var(p_i)=Var(y_{i+1}-y_1)=Var(y_{i+1})+Var(y_1)=2e^2$

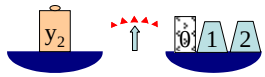
NB : Les y_i sont supposées indépendantes et de même variance e^2

Erreur sur chaque p_i : $2e^2$

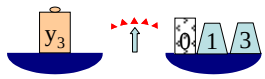
Récapitulatif : Plan B (4 pesées)

Pesée n°1 

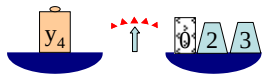
$y_1=p_0$

Pesée n°2 

$y_2=p_0+p_1+p_2$

Pesée n°3 

$y_3=p_0+p_1+p_3$

Pesée n°4 

$y_4=p_0+p_2+p_3$

Matrice des essais

Essai	Poids	Tare 0	Objet 1	Objet 2	Objet 3
1	y_1	1	0	0	0
2	y_2	1	1	1	0
3	y_3	1	1	0	1
4	y_4	1	0	1	1

Récapitulatif : Plan B (4 pesées)

- Calculs des poids

$y_1=p_0$

$y_2=p_0+p_1+p_2$

$y_3=p_0+p_1+p_3$

$y_4=p_0+p_2+p_3$

Solution :

$p_0=y_1$

$p_1=(y_2+y_3-y_1-y_4)/2$

$p_2=(y_2+y_4-y_1-y_3)/2$

$p_3=(y_3+y_4-y_1-y_2)/2$

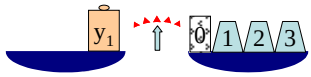
- Calcul de l'erreur

Pour $i\geq 1$ $Var(p_i)=\Sigma Var(y_i)/4=4e^2/4=e^2$

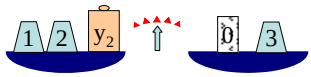
NB: Les y_i sont supposées indépendantes et de même variance e^2

Erreur sur chaque p_i : e^2

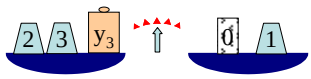
Récapitulatif : Plan C (4 pesées)

Pesée n°1 

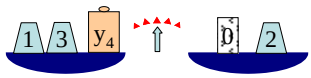
$y_1=p_0+p_1+p_2+p_3$

Pesée n°2 

$y_2=p_0-p_1-p_2+p_3$

Pesée n°3 

$y_3=p_0+p_1-p_2-p_3$

Pesée n°4 

$y_4=p_0-p_1+p_2-p_3$

Matrice des essais

NB : -1 si l'objet est à gauche

Essai	Poids	Tare 0	Objet 1	Objet 2	Objet 3
1	y1	1	1	1	1
2	y2	1	-1	-1	+1
3	y3	1	1	-1	-1
4	y4	1	-1	1	-1

Récapitulatif : Plan C (4 pesées)

- Calculs des poids

$y_1=p_0+p_1+p_2+p_3$

$y_2=p_0-p_1-p_2+p_3$

$y_3=p_0+p_1-p_2-p_3$

$y_4=p_0-p_1+p_2-p_3$

Solution :

$p_0=\dots$

$p_1=(y_1+y_3-y_2-y_4)/4$

$p_2=(y_1+y_4-y_2-y_3)/4$

$p_3=(y_1+y_2-y_3-y_4)/4$

- Calcul de l'erreur

Pour $i\geq 1$ $Var(p_i)=\Sigma Var(y_i)/16=4e^2/16=e^2/4$

NB: Les y_i sont supposées indépendantes et de même variance e^2

Erreur sur chaque p_i : $e^2/4$

Récapitulatif

Plan A : 4 Pesées Erreur: $2e^2$

Plan B : 4 Pesées Erreur: e^2

Plan C : 4 Pesées Erreur: $e^2/4$

NB: La plus basse possible.

Erreur divisée par 8

selon la façon de faire les expériences !

D'où l'intérêt de planifier les expériences !

Rappels

Soient Λ la matrice (diagonale) des valeurs propres et U la matrice des vecteurs propres de $X'X$. On sait que :

$$X'X=U\Lambda U^{-1}=U\Lambda U'$$

et que

$$(X'X)^{-1}=U\Lambda^{-1}U^{-1}=U\Lambda^{-1}U'$$

En posant $U=\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix}$ on montre que :

$$Var(\hat{a}_i)=\sigma^2\sum_{j=1}^{n}\frac{u_{i,j}^2}{\lambda_j}=\sigma^2\left(\frac{u_{i,1}^2}{\lambda_1}+\frac{u_{i,2}^2}{\lambda_2}+\dots+\frac{u_{i,n}^2}{\lambda_n}\right)$$

Efficience des plans d'expérience

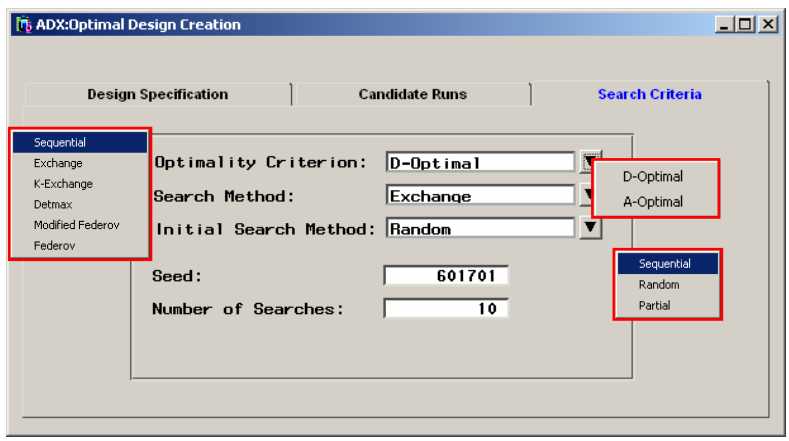
Les mesures de « l'efficience » d'un plan factoriel X de taille $N_D \times p$ (nombre de profils (combinaisons de produits testées) × nombre de niveaux des attributs) sont basées sur la « matrice d'information » $X'X$ et son inverse $(X'X)^{-1}$.

La matrice des variances-covariances des paramètres estimés selon la méthode des moindres carrés est proportionnelle à $(X'X)^{-1}$. Un plan « efficient » se doit d'avoir une « petite » matrice de variance (variance et efficience sont donc inversement liées). Les valeurs propres de $(X'X)^{-1}$ fournissent une mesure de la « taille » de la matrice des variances.

Efficience des plans d'expérience

SAS propose dans le module ADX deux types de mesure de l'efficience (d'autres mesures sont disponibles dans la PROC OPTEX) :

l'efficience A (« *A-efficiency* ») et l'efficience D (« *D-Efficiency* »)



Efficience des plans d'expérience

Efficience A (« *A-efficiency* ») : fonction de la moyenne arithmétique des valeurs propres, elle est égale à :

$$\mathbf{trace((X'X)^{-1})/p}$$

Efficience D (« *D-Efficiency* ») : fonction de la moyenne géométrique des valeurs propres, elle est égale à :

$$\mathbf{|(X'X)^{-1}|^{1/p}}$$

(Remarque : un plan orthogonal a une efficience optimale.)

Ces mesures d'efficience peuvent être échelonnées de 0 à 100 (valeurs relatives) afin de pouvoir, dans une situation donnée, comparer différents plans :

$$A\text{-}efficiency : 100 \times \frac{1}{N_D \; trace\left((X'X)^{-1}\right)/p}$$

$$D\text{-}Efficiency : 100 \times \frac{1}{N_D \left|(X'X)^{-1}\right|^{1/p}}$$

Efficience des plans d'expérience

Soient deux plans de type 4433 et de taille 16×4 :

Le plan B est légèrement plus efficient que le plan A

$$PlanA := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0.33 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0.33 & -1 & -1 & -1 \\ 0.33 & -.33 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0.33 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -.33 & -1 & 0 \\ -.33 & 1 & 1 & -1 \\ -.33 & -.33 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Plan A
A-eff : 62.2255
D-eff : 62.9332

$$PlanB := \begin{bmatrix} -1 & -.33 & -1 & -1 \\ -.33 & -1 & 0 & -1 \\ 0.33 & -1 & -1 & 1 \\ 0.33 & -.33 & -1 & 0 \\ -1 & 0.33 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -.33 & 1 & -1 & 1 \\ -.33 & 0.33 & -1 & 0 \\ 1 & 0.33 & -1 & -1 \\ 1 & & & -1 \\ 1 & & & -1 \\ 0.33 & 0.33 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Plan B
A-eff : 63.5678
D-eff : 64.3732

Une liste de plans « prêts à l'emploi » peut être trouvée sur :
http://www.rci.rutgers.edu/~chanchoi/mr/ovhd/ffdesign.htm