Licence MMIA troisième année Année 2006-2007

Examen du 13 juin 2007
Durée deux heures
Documents et calculatrices interdits.

*Exercice* 1. Soit $E$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On note

$$P = \sum_{j=0}^{d^\circ(P)} a_j X^j$$

un élément de $E$. On considère les normes suivantes :

$$\|P\|_\infty = \sup_{0 \le k \le d^\circ(P)} |a_k| \ , \quad \|P\|_1 = \sum_{k=0}^{d^\circ(P)} |a_k| \ , \quad \|P\|_2 = \left( \sum_{k=0}^{d^\circ(P)} a_k^2 \right)^{1/2} \ .$$

(i) Donner une base et la dimension de l'espace $E$.

(ii) Établir des inégalités de comparaison entre $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ (valables pour tous les polynômes, quel que soit leur degré).

(iii) On considère la suite de polynômes $\{P_n\}_{n\ge 1}$ définie par :

$$P_n = 1 + X + \frac{1}{n} X^2 + \cdots + \frac{1}{n} X^{n+1} \ .$$

Étudier la limite de $\|P_n - (1+X)\|_1$, $\|P_n - (1+X)\|_2$ et $\|P_n - (1+X)\|_\infty$. Montrer que $P_n$ tend vers $1+X$ au sens des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ mais pas au sens de la norme $\|\cdot\|_1$.

(iv) Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes deux à deux.

*Exercice* 2. Soit $f$ la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

(i) Pour $k \ge 0$, calculer les coefficients $c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x$.

(ii) Pour $k \ge 1$, calculer les coefficients $s_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x$.

(iii) Exprimer l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x$ en fonction des coefficients $c_k$ et $s_k$.

(iv) Calculer la somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4}$.

*Exercice* 3. Soit $E$ l'espace vectoriel de Hilbert (on admettra qu'il est complet) des suites $\{x_k, k \ge 1\}$ de carrés sommables muni de la norme $\|\cdot\|$ définie pour $x \in E$ par

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \ .$$

Pour $n \ge 1$, soit $F_n$ le sous-espace de $E$ des suites dont les éléments d'indice strictement supérieur à $n$ sont nuls, et soit $G = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$.

(i) Montrer que $F_n$ est un fermé d'intérieur vide.

(ii) $G$ est-il un sous-espace vectoriel ?

(iii) Montrer que $G$ est d'intérieur vide.

(iv) Montrer que $G$ est dense dans $E$.