2006-2007 MMIA L3

Devoir surveillé du 7 mai 2007
Durée deux heures
Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriels des polynômes à coefficients réels. On considére l'application linéaire ϕ définie par

$$\phi(P) = P' \ .$$

(i) *L'application ϕ est-elle continue ?*
L'espace E étant de dimension infinie, on ne peut répondre à cette question sans avoir spécifié une norme sur E.

Soit N_1 l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{\mathrm{d^o(P)}} |a_i| \ ,$$

pour $P = \sum_{i=0}^{\mathrm{d^o(P)}} a_i X^i$.

(ii) *Montrer que N_1 est une norme sur E.*
On vérifie aisément les axiomes de la norme : $N(P) \geq 0$, $N_1(P) = 0$ si et seulement si $P = 0$, $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$ et l'inégalité triangulaire.

(iii) *Soit $P_n = n^{-1}X^n$. Montrer que la suite P_n converge vers 0.*
Il suffit de vérifier que $N_1(P_n)$ tend vers 0. Or on a par définition $N_1(P_n) = 1/n$ pour tout n, donc P_n tend vers 0.

(iv) *Calculer $N_1(\phi(P_n))$.*
La dérivée de P_n est X^{n-1} donc $N_1(\phi(P_n)) = 1$ pour tout n.

(v) *L'application ϕ est-elle continue pour N_1 ?*
Puisque la suite P_n converge vers 0 mais $\phi(P_n)$ ne converge pas vers 0, on en déduit que ϕ n'est pas continue.

Soit N_2 l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$N_2(P) = |a_0| + \sum_{i=1}^{\mathrm{d^o(P)}} i|a_i| \ ,$$

(vi) *Montrer que N_2 est une norme sur E.*
On procède de même que précédemment.

(vii) *L'application ϕ de (E, N_2) dans (E, N_1) est-elle continue en zéro ?*
Il faut vérifier que la norme $N_1(\phi(P))$ est petite dès que la norme $N_2(P)$ l'est. Or on a

$$N_1(\phi(P)) = N_2(P) - |a_0| \leq N_2(P) \ .$$

Pour $\epsilon > 0$ donné, on a donc $N_1(\phi(P)) \leq \epsilon$ dès que $N_2(P) \leq \epsilon$. L'application $\phi : (E, N_2) \to (E, N_1)$ est donc continue en 0.

(viii) *L'application ϕ de (E, N_2) dans (E, N_1) est-elle continue pour N_2 ?*
Une application linéaire est continue si et seulement si elle est continue en 0, donc ϕ est continue pour les normes considérées à la question précédente.

(ix) *La suite P_n converge-t-elle pour N_2 ? a-t-elle des valeurs d'adhérence pour N_2 ?*
Montrons que La suite P_n n'est pas de Cauchy pour N_2. On a pour $n \neq m$ des entiers positifs,

$$N_2(P_n - P_m) = 2 \ .$$

La suite n'est donc pas de Cauchy, et de même aucune sous-suite ne peut être de Cauchy, donc elle n'admet pas de valeurs d'adhérence.

(x) *La boule unité de N_2 est-elle compacte ?*
On sait que la boule unité n'est jamais compacte en dimension infinie. Ici, on a de plus exhibé une suite n'admettant pas de valeurs d'adhérence, ce qui est impossible si la suite était à valeurs dans un compact.