

Examen du 4 septembre 2007
DUREE 2 HEURES
Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. On note $[x]$ la partie entière. La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x(x^{-1} - [x^{-1}])$ admet-elle une limite en 0 ? La déterminer le cas échéant.

Exercice 2. Etudier l'ensemble de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}$$

et calculer sa dérivée aux points où elle est définie.

Exercice 3. Soit $f : x \mapsto x^2 \sin(x)$. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $I = [0, \pi/2]$ réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. On note g la réciproque de f . En quels points de J la fonction g est-elle dérivable ? non dérivable ? Justifiez votre réponse à l'aide des théorèmes du cours. Peut-on mener cette étude pour la fonction $x^2 \cos(x)$ sur le même intervalle ?

Exercice 4. Déterminer, si elle existe, la limite en 0 de la fonction

$$\frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin(x)}.$$

Exercice 5. Développer à l'ordre 5 en 0 la fonction f définie par

$$f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Exercice 6. Etudier la série de terme général $u_n = \cos(\sqrt{\pi^2/4 - 1/n^2})$.