

Épreuve terminale de Mathématiques 2

Durée de l'épreuve : 2 h

L'utilisation de calculatrices et d'appareils électroniques est interdit. Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Mathématiques 2 Épreuve terminale de Mathématiques 2 2005-2006 1

Exercice 1.

1) Soit A la matrice carrée d'ordre 2 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -3/4 \end{pmatrix}$$

On note q la forme quadratique associée à A .

1.a) Écrire q sous la forme $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

1.b) Quelle est la signature de q ?

2) Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} donnée par l'expression

$$f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$$

2.a) Déterminer la ligne de niveau de hauteur 0 et la représenter graphiquement.

2.b) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en un point (x, y) de \mathbb{R}^2 .

2.c) Déterminer tous les points stationnaires de f .

2.d) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en un point (x, y) de \mathbb{R}^2 .

2.e) Écrire le développement limité d'ordre 2 de f en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2.f) En utilisant le résultat de la question 1.b), déterminer la nature du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$?

Exercice 2.

1) Soient $u_1 = (1, 1, -2)$, $u_2 = (2, -3, 1)$, $u_3 = (4, -1, -3)$ et $u_4 = (2, 1, -2)$. On note V le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1 et u_2 .

1.a) Déterminer la dimension de V et donner une base de V .

1.b) Établir une équation de V .

1.c) Montrer que le vecteur u_3 appartient à V .

1.d) Décomposer u_3 sur la famille $\{u_1, u_2\}$.

1.e) Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_4\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

2) Soit (\mathcal{S}) le système linéaire :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x - 3y + z = 12 \\ -2x + y - 2z = -9 \end{cases}$$

2.a) Résoudre (\mathcal{S}) à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

- 2.b) Écrire matriciellement (\mathcal{S}) sous la forme $AX = b$ en précisant les valeurs de A , X et b .
- 2.c) Calculer A^{-1} en utilisant la méthode de la matrice témoin.
- 2.d) Résoudre (\mathcal{S}) en utilisant le résultat de la question précédente.