Université Paris X
Maitrise MASS
Examen de séries chronologiques du 14 septembre 2005.
Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Soit (X, Y) un vecteur Gaussien centré de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Soit $Z = (Y - \rho X)/\sqrt{1-\rho^2}$. Montrer que Z est indépendante de X.

(ii) Calculer $\mathrm{cov}(X^2, Y^2)$ en utilisant Z.

Soit $\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus Gaussien stationnaire centré de variance σ^2 et de fonction d'autocorrélation r i.e. $r(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k)/\sigma^2$. Soit $\hat{\sigma}_n^2 = n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k^2$.

(iii). Le processus $\{X_k^2\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire ?

(iv). En utilisant la question (ii), calculer $\mathrm{var}(\hat{\sigma}_n^2)$.

(v). Donner une condition sur r pour que $\hat{\sigma}_n^2$ soit un estimateur consistant de σ^2 ?

Exercice 2. On considère l'équation de récurrence

$$X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = \epsilon_t + \epsilon_{t-1}, \tag{1}$$

où ϵ est un bruit blanc centré de variance σ^2.

(i). Montrer qu'il existe une solution stationnaire causale centrée qui admet la représentation $X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\epsilon_{t-j}$, avec des coefficients ψ_j (qu'on ne cherchera pas à déterminer) qui vérifient $\psi_0 = 1$ et $\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j| < \infty$.

(ii). Montrer que $\psi_1 = 1$.

(iii). Soit γ la fonction d'autocovariance de X définie par $\gamma(t) = \mathbb{E}[X_0X_t]$. Montrer que pour $k \geq 2$, on a

$$\gamma(k) - \gamma(k-1) + \frac{1}{4}\gamma(k-2) = 0. \tag{2}$$

(iv). Montrer que l'on a aussi

$$\gamma(0) - \gamma(1) + \frac{1}{4}\gamma(2) = \sigma^2(\psi_0 + \psi_1),$$
$$\gamma(1) - \gamma(0) + \frac{1}{4}\gamma(1) = \sigma^2\psi_0.$$

(v). On rappelle que la forme générale des solutions de l'équation (2) est $\gamma(n) = (a + bn)2^{-n}$. En déduire $\gamma(n)$ pour tout n en fonction de σ^2 seulement.

Exercice 3. Soit $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et soit ω un réel. Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus défini par $X_t = Z_t\cos(\omega t) + Z_{t-1}\sin(\omega t)$. Le processus X est-il stationnaire ? Calculer sa foncton d'autocovariance.

Exercice 4. Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables i.i.d. centrées de variance σ^2 et soit a un réel tel que $|a| < 1$. On considère le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$X_0 = 0, \quad X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t, \quad t \geq 1.$$

Soit $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ le processus défini par

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \epsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

(i) Le processus X est-il stationnaire ? Le processus Y est-il stationnaire ?

(ii) Exprimer X_t en fonction de a et du processus Y.

(iii) Soit $\hat{a}_n(Y) = \hat{\gamma}_{n,Y}(1)/\hat{\gamma}_{n,Y}(0)$, où $\hat{\gamma}_{n,Y}(1) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n-1} Y_tY_{t+1}$ et $\hat{\gamma}_{n,Y}(0) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} Y_t^2$. $\hat{a}_n(Y)$ est-il un estimateur de a ?

(iv) Quelle est la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{a}_n(Y) - a)$?

(v) Soit $\hat{a}_n(X)$ l'estimateur empirique de a, construit sur les observations X. Exprimer $\hat{a}_n(X)$ en fonction de Y et de a.

(vi) En déduire le comportement asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{a}_n(X) - a)$.