Université Paris X
Maitrise MASS
Corrigé de l'examen de séries chronologiques du 7 juin 2005.

Exercice 1. Soient $\{U_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ et $\{V_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ deux bruits blancs centrés de variances respectives σ^2 et τ^2 et mutuellement indépendants. Soient a et b des réels non nuls. On définit un processus $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ par

$$\begin{aligned} X_{2t} &= aU_t + bV_t \ , \\ X_{2t+1} &= bU_t + aV_{t+1} \ . \end{aligned}$$

(i). On va évidemment utiliser le fait que U et V sont des bruits blancs indépendants l'un de l'autre.

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X_{2t}) &= \mathrm{var}(aU_t + bV_t) \\ &= a^2\mathrm{var}(U_t) + 2ab\,\mathrm{cov}(U_t, V_t) + b^2\mathrm{var}(V_t) = a^2\sigma^2 + b^2\tau^2 \ , \\ \mathrm{var}(X_{2t+1}) &= \mathrm{var}(bU_t + aV_{t+1}) \\ &= b^2\mathrm{var}(U_t) + 2ab\,\mathrm{cov}(U_t, V_{t+1}) + a^2\mathrm{var}(V_t) = b^2\sigma^2 + a^2\tau^2 \ , \\ \mathrm{cov}(X_{2t}, X_{2t+1}) &= \mathrm{cov}(aU_t + bV_t, bU_t + aV_{t+1}) \\ &= ab\,\mathrm{var}(U_t) + a^2\mathrm{cov}(U_t, V_{t+1}) + b^2\mathrm{cov}(U_t, V_t) + ab\,\mathrm{cov}(V_t, V_{t+1}) \\ &= ab\,\mathrm{var}(U_t) = ab\,\sigma^2 \ , \\ \mathrm{cov}(X_{2t+1}, X_{2t+2}) &= \mathrm{cov}(bU_t + aV_{t+1}, aU_{t+1} + bV_{t+1}) \\ &= ab\,\mathrm{cov}(U_t, U_{t+1}) + b^2\mathrm{cov}(U_t, V_{t+1}) + a^2\mathrm{cov}(V_{t+1}, U_{t+1}) + ab\,\mathrm{var}(V_{t+1}) \\ &= ab\,\mathrm{var}(V_{t+1}) = ab\,\sigma^2 \ . \end{aligned}$$

(ii). Par définition, X_k dépend de U_t et V_s pour s, t entiers parmi $k/2$, $(k-1)/2$ et $(k+1)/2$ (qui ne sont pas simultanément entiers bien sûr). Si $j \geq 3$, alors $(k + j - 1)/2 > k + 1)/2$, et donc X_k et X_{k+j} sont indépendants. Si $j = 2$, on vérifie séparément pour k pair et impair que X_k et X_{k+2} sont aussi inépendants. Dans tous les cas, $\mathrm{cov}(X_k, X_{k+j}) = 0$.

(iii). Le processus X est centré, et sa fonction de covariance s'écrit donc

$$\begin{aligned} \Gamma(2t, 2t) &= a^2\sigma^2 + b^2\tau^2 \ , \\ \Gamma(2t+1, 2t+1) &= a^2\sigma^2 + b^2\tau^2 \ , \\ \Gamma(2t, 2t+1) &= ab\,\sigma^2 \ , \\ \Gamma(2t+1, 2t+2) &= ab\,\tau^2 \ , \\ \Gamma(s, t) &= 0 \text{ si } |s - t| \geq 2 \ . \end{aligned}$$

Pour obtenir la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire au second ordre, il faut et il suffit donc d'avoir

$$\begin{aligned} a^2\sigma^2 + b^2\tau^2 &= a^2\sigma^2 + b^2\tau^2 \ , \\ ab\,\sigma^2 &= ab\,\tau^2 \ . \end{aligned}$$

Puisque a et b sont tous deux non nuls, il faut et il suffit donc que $\sigma = \tau$ pour que X soit stationnaire.

(iv). On suppose $|b/a| < 1$ et l'on pose $\theta = b/a$ et $\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^j X_{t-j}$.
La série $\sum_{j=0}^{\infty} |\theta|^j$ est absolument convergente, donc le processus ϵ est bien défini, centré et stationnaire au second ordre. Sa fonction de covariance est calculée à partir de celle de X par bilinéarité de la covariance. Soit $h \in \mathbb{N}$.

$$\operatorname{cov}(\epsilon_0, \epsilon_h) = \operatorname{cov}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^j X_{-j}, \sum_{j'=0}^{\infty}(-\theta)^{j'} X_{h-j'}\right) = \sum_{j,j'=0}^{\infty} (-\theta)^{j+j'}\gamma_X(h-j'+j) \ .$$

Puisque $\gamma_X(k) = 0$ sauf si $k = 0$ ou $|k| = 1$, on ne garde de la somme en j' que les termes $j' = h + j$, $j' = h + j + 1$ et $j' = h + j - 1$. Ce dernier cas n'est pas possible si $h = 0$ et $j = 0$. On obtient donc pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\epsilon_0, \epsilon_h) &= \gamma_X(0)(-\theta)^h \sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^{2j} + \gamma_X(-1)(-\theta)^{h+1}\sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^{2j} \\ &\quad + \gamma_X(1)(-\theta)^{h-1}\sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^{2j} = \left(a^2 + b^2 - ab\theta - ab/\theta\right)(-\theta)^h/(1-\theta^2) = 0 \ . \end{aligned}$$

Pour $h = 0$, la dernière somme commence à $j = 1$, et l'on obtient donc

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(\epsilon_0) &= \gamma_X(0)\sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^{2j} - \theta\gamma_X(-1)\sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^{2j} - \theta^{-1}\gamma_X(1)\sum_{j=1}^{\infty}(-\theta)^{2j} \\ &= \left(a^2 + b^2 - ab\theta - ab/\theta\right)/(1-\theta^2) = a^2 \ . \end{aligned}$$

Le processus ϵ est donc bien un bruit blanc de variance a^2.

(v). Soit B l'opérateur de retard et soit $A(z) = 1 + \theta z$. Le polynôme A ne s'annule pas sur le disque unité fermé du plan complexe, et $\epsilon = A^{-1}(B)X$. Donc $X = A(B)\epsilon$.

(vi). Si $|b/a| > 1$, on pose $\eta_t = \sum_{j=1}^{\infty}(-a/b)^j X_{t+j}$. On a alors $X_t = \eta_t + a/b\eta_{t-1}$, et η est un bruit blanc de variance b^2.

Exercice 2. Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ une processus gaussien stationnaire centré. On suppose que X admet une représentation AR(2) par rapport à un bruit blanc ϵ :

$$X_n + aX_{n-1} + bX_{n-2} = \epsilon_n \ .$$

(i). Exprimer a et b en fonction des autocorrélations $\rho(1)$ et $\rho(2)$. On note $\hat{a}_n$ et $\hat{b}_n$ les estimateurs empiriques de a et b basés sur n observations du processus X.

En multipliant les deux membres de l'équation autorégressive par X_{n-1} et X_{n-2} (mais surtout pas par X_n), on obtient le système :

$$\rho(1) + a + b\rho(1) = 0 \ ,$$
$$\rho(2) + a\rho(1) + b = 0 \ ,$$

qui se résoud en

$$a = -\rho(1)\frac{1-\rho(2)}{1-\rho^2(1)} \ , \quad b = \frac{\rho^2(1)-\rho(2)}{1-\rho^2(1)} \ .$$

(ii). On pose $\lim_{n\to\infty} \hat{a}_n = \alpha$ et $\lim_{n\to\infty} \hat{b}_n = \beta$. Exprimer α et β en fonction de $\rho(1)$ et $\rho(2)$. Que valent ces limites si le modèle est correct ?

Les estimateurs empiriques des autocorrélations d'un processus autorégressif gaussien stationnaire sont consistants, on a donc

$$\alpha = -\rho(1)\frac{1-\rho(2)}{1-\rho^2(1)} \ , \quad \beta = \frac{\rho^2(1)-\rho(2)}{1-\rho^2(1)} \ .$$

Si le modèle est correct, on a évidemment $\alpha = a$ et $\beta = b$.

(iii). Si le modèle est correct, le processus $W_n = X_n + \alpha X_{n-1} + \beta X_{n-2}$ est un bruit blanc.

(iv). Soit $\hat{W}_n = X_n + \hat{a}_n X_{n-1} + \hat{b}_n X_{n-2}$. Suggérer un test pour valider l'hypothèse que X est bien un processus AR(2).

Pour tester l'adéquation de X à un modèle AR(2), on calcule les autocorrélations empiriques $\hat{\rho}_{\hat{W}}(1), \dots, \hat{\rho}_{\hat{W}}(k)$ pour un entier k choisi arbitrairement (par exemple $k = 3$ ou 4). Si le modèle est correct le vecteur $\hat{\rho}_{\hat{W}}(1), \dots, \hat{\rho}_{\hat{W}}(k)$ converge vers un vecteur gaussien k-dimensionnel centré r{eduit, et donc la statistique de test $T_n = \sum_{j=1}^{k} \hat{\rho}^2_{\hat{W}}(j)$ suit approximativement une loi du χ^2 à k degrés de liberté. La région de rejet de l'hypothèse "le processus X est un AR(2) est donc de la forme $\{T_n > t_{k,\alpha}\}$, où $t_{n,\alpha}$ est un quantile de la loi du χ^2 à k degrés de liberté.

(v). En fait le processus X est un MA(1) par rapport au bruit blanc ϵ, d'équation $X_n = \epsilon_n + \theta\epsilon_{n-1}$. Calculer alors les autocorrélations $\rho(1)$ et $\rho(2)$ de X et exprimer α et β en fonction de θ.

On a alors $\rho(1) = \theta/(1+\theta^2)$ et $\rho(2) = 0$, ce qui entraîne

$$\alpha = \frac{-\theta(1+\theta^2)}{1+\theta^2+\theta^4} \ , \quad \beta = \frac{\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4} \ .$$

(vi). Montrer que W est un processus MA(3). Calculer en fonction de θ les autocorrélations $\rho_W(1)$ et $\rho_W(2)$.

On remplace X par son expression en fonction de ϵ dans l'équation définissant le processus W et on reporte les expressions de α et β trouvées à la question précédente :

$$\begin{aligned} W_n = X_n + \alpha X_{n-1} + \beta X_{n-2} &= \epsilon_n + (\theta+\alpha)\epsilon_{n-1} + (\alpha\theta+\beta)\epsilon_{n-2} + \beta\theta\epsilon_{n-3} \\ &= \epsilon_n + \frac{\theta^5}{1+\theta^2+\theta^4}\,\epsilon_{n-1} - \frac{\theta^4}{1+\theta^2+\theta^4}\,\epsilon_{n-2} - \frac{\theta^3}{1+\theta^2+\theta^4}\,\epsilon_{n-3}\ . \end{aligned}$$

Si l'on écrit le processus MA(3) sous la forme $W_n = \epsilon_n + u\epsilon_{n-1} + v\epsilon_{n-2} + w\epsilon_{n-3}$, on obtient :

$$\rho_W(1) = \frac{u+uv+vw}{1+u^2+v^2+w^2}\ , \quad \rho_W(2) = \frac{v+uw}{1+u^2+v^2+w^2}\ .$$

En remplaçant par les expressions de u, v et w en fonction de θ, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \rho_W(1) &= \frac{\theta^5(1+2\theta^2)}{1+2\theta^2+3\theta^4+3\theta^6+2\theta^8+\theta^{10}}\ , \\ \rho_W(1) &= -\frac{\theta^4(1+\theta^2+2\theta^4)}{1+2\theta^2+3\theta^4+3\theta^6+2\theta^8+\theta^{10}}\ . \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit Y un processus stationnaire au second ordre, centré, de fonction d'autocovariance γ_Y et de densité spectrale f_Y. Soit T un entier strictement positif et s une fonction T périodique telle que $\sum_{k=1}^{T} s(k) = 0$. On considère le processus $X_t = s(t) + Y_t$.

(i). Le processus X n'est pas stationnaire car $\mathbb{E}[X_t] = s(t)$ n'est pas constant sauf si la fonction s est identiquement nulle ce que nous exclurons.

(ii). On pose $U_t = \sum_{i=0}^{T-1} X_{t-i}$.

$$\begin{aligned} U_t = \sum_{i=0}^{T-1} s(t-i) + \sum_{i=0}^{T-1} Y_{t-i} = \sum_{i=0}^{T-1} Y_{t-i}\ , \quad \mathbb{E}[U_t] = \sum_{i=0}^{T-1} \mathbb{E}[Y_{t-i}] = 0\ ; \\ \mathrm{var}(U_t) = \mathbb{E}[U_t^2] = \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{i'=0}^{T-1} \gamma_Y(i-i') \ = \sum_{k=1-T}^{T-1} (T-|k|)\gamma_Y(k) \\ \mathrm{cov}(U_t, U_t+h) = \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{i'=0}^{T-1} \gamma_Y(i-i'+h) \ = \sum_{k=1-T}^{T-1} (T-|k|)\gamma_Y(h+k)\ . \end{aligned}$$

(iii). Posons $f(x) = f_Y(x)\,\sin^2(Tx/2)/\sin^2(x/2)$. Pour prouver que f est la densité spectrale du processus U, il suffit de prouver que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}hx}\,\mathrm{d}x = \mathrm{cov}(U_0, U_h)$ pour tout h. En utilisant la question précédente et le fait que f_Y est la densité spectrale de Y, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(U_0, U_h) &= \sum_{k=1-T}^{T-1} (T - |k|)\gamma_Y(h+k) = \sum_{k=1-T}^{T-1} (T - |k|) \int_{-\pi}^{\pi} f_Y(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(h+k)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f_Y(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(h)x} \sum_{k=1-T}^{T-1} (T - |k|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f_Y(x) \left| \sum_{k=0}^{T-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}hx}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f_Y(x) \frac{\sin^2(Tx/2)}{\sin^2(x/2)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}hx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}hx}\,\mathrm{d}x\;.
\end{aligned}
$$

Exercice 4. (i). On applique le fait que X est un bruit blanc et les formules de sommation rappelées dans l'énoncé pour obtenir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(C_n(x_i), C_n(x_j)) &= \frac{1}{n} \sum_{t,t'=1}^{n} \mathrm{cov}(X_t, X'_t) \cos(tx_i)\cos(t'x_j) \\
&= \frac{\sigma^2}{n} \sum_{t=1}^{n} \cos(tx_i)\cos(tx_j) = \frac{\sigma^2}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\;, \\
\mathrm{cov}(S_n(x_i), S_n(x_j)) &= \frac{1}{n} \sum_{t,t'=1}^{n} \mathrm{cov}(X_t, X'_t) \sin(tx_i)\sin(t'x_j) \\
&= \frac{\sigma^2}{n} \sum_{t=1}^{n} \sin(tx_i)\sin(tx_j) = \frac{\sigma^2}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\;, \\
\mathrm{cov}(C_n(x_i), S_n(x_j)) &= \frac{1}{n} \sum_{t,t'=1}^{n} \mathrm{cov}(X_t, X'_t) \cos(tx_i)\sin(t'x_j) \\
&= \frac{\sigma^2}{n} \sum_{t=1}^{n} \cos(tx_i)\sin(tx_j) = 0\;.
\end{aligned}
$$

(ii). Si $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien, les variables $C_n(x_j)$ et $S_n(x_j)$ sont conjointement gaussiennes comme combinaisons linéaires de variables i.i.d. gaussiennes centrées. Comme elles sont de plus centrées et non corrélées, ce sont des variables gaussiennes indépendantes et de même variance $\sigma^2/2$.

(iii). De même, les variables $I_n(x_1), \ldots, I_n(x_{\tilde{n}})$ sont i.i.d. et la loi de $2I_n(x_k)/\sigma^2$ est la loi du χ^2 à deux degrés de liberté, donc la loi de $I_n(x_k)/\sigma^2$ est la loi exponentielle standard.