Université de Paris X Nanterre MASTER ISIFAR

Corrigé de l'examen de séries chronologiques du 13 juin 2007

Exercice 1. Soit $\{\epsilon_n\}$ un bruit blanc centré de variance σ^2, soit a un réel différent de 1 et -1 et soit $\{X_n\}$ le processus stationnaire solution de l'équation

$$X_n = aX_{n-1} + \epsilon_n \tag{1}$$

(i) *Déterminer la fonction d'autocovariance γ et la densité spectrale f du processus $\{X_n\}$ si $|a| < 1$. Quelle est l'équation de récurrence vérifiée par γ ?*

Si $|a| < 1$, on sait que la solution stationnaire de l'équation (1) est donnée par $X_n = \sum_{j=1}^{\infty} a^j \epsilon_{n-j}$. On a alors

$$\gamma(k) = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^k = \gamma(0) a^k \ ,$$
$$f(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left|1 - a\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|^{-2} \ .$$

La fonction d'autocovariance γ vérifie donc l'équation de récurrence $\gamma(k) = a\gamma(k-1)$ pour $k \geq 1$.

(ii) *On observe $X_1, \ldots, X_n$. Ecrire (sans justification) l'estimateur $\hat{a}_n$ de a donné par les équations de Yule-Walker lorsque $|a| > 1$. Quelles sont ses propriétés ?*

L'estimateur de a donné par les équations de Yule Walker est la corrélation empirique $\hat{\rho}_n(1)$, défini par

$$\hat{a}_n = \hat{\rho}_n(1) = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}(X_k - \bar{X}_n)(X_{k+1} - \bar{X}_n}{\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^2} \ ,$$

avec $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

On suppose maintenant que $|a| > 1$. On considère l'estimateur $\hat{a}_n$ défini ci-dessus, et l'on veut connaître ses propriétés dans ce cas.

(iii) *On pose $\theta = 1/a$. Montrer que la solution stationnaire de l'équation (1) est donnée par*

$$X_n = -\sum_{j=1}^{\infty} \theta^j \epsilon_{n+j} \ . \tag{2}$$

On sait que le processus $\{X_n\}$ ainsi défini est stationnaire, et on doit montrer qu'il vérifie l'équation (1). On a

$$\begin{aligned} X_{n-1} &= -\sum_{j=1}^{\infty} \theta^j \epsilon_{n-1+j} = -\theta \sum_{j=1}^{\infty} \theta^{j-1} \epsilon_{n+j-1} \\ &= -\theta \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \epsilon_{n+j} = -\theta\epsilon_n - \theta \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j \epsilon_{n+j} = -\theta\epsilon_n + \theta X_n \ , \end{aligned}$$

soit, en mutipliant par a et utilisant le fait que $\theta = 1/a$,

$$aX_{n-1} = -\epsilon_n + X_n \ ,$$

ce qui est exactement l'équation (1).

(iv) *Calculer la fonction d'autocovariance et la densité spectrale du processus $\{X_n\}$ en fonction de θ puis de a. Quelle est l'équation de récurrence vérifiée par γ ?*

En utilisant l'équation (2), on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma(k) &= \mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathrm{cov}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \theta^j \epsilon_j, \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j \epsilon_{k+j}\right) \\
&= \sigma^2 \theta^k \sum_{j=1}^{\infty} \theta^{2j} = \frac{\sigma^2\theta^2}{1-\theta^2}\theta^k = \frac{\sigma^2}{a^2-1} a^{-k} \ , \\
f(x) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx} \right|^2 = \frac{\sigma^2\theta^2}{2\pi} \left|1 - \theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|^{-2} = \frac{\sigma^2}{2\pi a^2} \left|1 - a^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|^{-2} \ .
\end{aligned}$$

L'équation de récurrence vérifiée par γ est donc maintenant $\gamma(k) = \theta\gamma(k-1) = a^{-1}\gamma(k-1)$.

(v) *Déterminer en fonction de θ puis de a la limite des estimateurs empiriques $\hat{\gamma}_n(0)$ et $\hat{\gamma}_n(1)$, puis de $\hat{a}_n$.*

Les estimateurs empiriques sont toujorus consistants, donc $\hat{\gamma}_n(k)$ converge vers $\gamma(k)$ pour tout k. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \hat{a}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\hat{\gamma}_n(1)}{\hat{\gamma}_n(0)} = \theta = 1/a \ .$$

Exercice 2. Soit $\{U_n\}$ un bruit blanc centré de variance σ^2 et soit $\{Y_n\}$ le processus défini par

$$Y_n = U_n + \frac{1}{2}U_{n-1} \ , \ n \in \mathbb{Z} \ .$$

(i) *Déterminer la densité spectrale f_Y de $\{Y_n\}$.*

$f(x) = (2\pi)^{-1}\sigma^2|1 + (1/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|^2$.

(ii) *Déterminer la fonction d'autocovariance γ de $\{Y_n\}$.*

$\gamma(0) = 5\sigma^2/4$, $\gamma(1) = \sigma^2/2$ et $\gamma(k) = 0$ pour tout $k \geq 2$.

(iii) *Le processus $\{Y_n\}$ est-il inversible par rapport au bruit blanc $\{U_n\}$? Le cas échéant, donner l'expression de U_n en fonction de $\{Y_k, k \leq n\}$.*

Le processus $\{Y_n\}$ est inversible par rapport au bruit blanc $\{U_n\}$ et l'on a

$$U_n = \sum_{j=0^{\infty}} (-1/2)^n \epsilon_{n-j} \ .$$

(iv) *Déterminer la variance de l'erreur de prédiction à un pas sur passé infini.*

Puisque le processus $\{Y_n\}$ est inversible et causal par rapport au bruit blanc $\{U_n\}$, U_n est l'innovation et la variance de l'erreur de prédiction est σ^2.

(v) *Soit a un nombre réel tel que $|a| < 1$. On pose*

$$X_n = Y_n + aX_{n-1} \ .$$

Justifier que l'on peut exprimer X_n en fonction de $\{Y_k, k \leq n\}$ et donner cette expression.

Puisque $|a| < 1$, on peut exprimer X_n en fonction de $\{Y_k, k \leq n\}$:

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} a^j Y_{n-j} \ .$$

(vi) *Déterminer la densité spectrale du processus $\{X_n\}$.*

Par le théorème de filtrage, la densité spectrale de X est donnée par

$$f_X(x) = \left| \sum_{j=0}^{\infty} a^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx} \right|^2 f_Y(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|^2}{|1 - a\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|^2}$$

(vii) *Justifier que l'on peut exprimer X_n en fonction de $\{U_k, k \leq n\}$ et donner cette expression.*

Puisque le processus $\{Y_n\}$ est linéaire par rapport au bruit blanc processus $\{U_n\}$, avec un filtre fini, X_n s'écrit aussi linéairement par rapport à $\{U_n\}$:

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{j=0}^{\infty} a^j Y_{n-j} = \sum_{j=0}^{\infty} a^j (U_{n-j} + \frac{1}{2} U_{n-j-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j U_{n-j} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} a^j \frac{1}{2} U_{n-j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a^j U_{n-j} + \frac{1}{2a} \sum_{j=0}^{\infty} a^{j+1} \frac{1}{2} U_{n-j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} a^j U_{n-j} + \frac{1}{2a} \sum_{j=1}^{\infty} a^j U_{n-j} \\ &= U_n + \frac{1+2a}{2a} \sum_{j=1}^{\infty} a^j U_{n-j} \ . \end{aligned}$$

(viii) *Quelle est la nature du processus $\{X_n\}$?*

Le processus $\{X_n\}$ est un processus ARMA(1,1) inversible et causal.