Université de Paris X Nanterre MASTER ISIFAR

Examen de séries chronologiques du 13 juin 2007

Tous documents et tous matériels électroniques sont interdits.

DUREE 2 HEURES

Exercice 1. Soit $\{\epsilon_n\}$ un bruit blanc centré de variance σ^2, soit a un réel différent de 1 et -1 et soit $\{X_n\}$ le processus stationnaire solution de l'équation

$$X_n = aX_{n-1} + \epsilon_n \tag{1}$$

(i) Déterminer la fonction d'autocovariance γ et la densité spectrale f du processus $\{X_n\}$ si $|a| < 1$. Quelle est l'équation de récurrence vérifiée par γ ?

(ii) On observe $X_1, \ldots, X_n$. Ecrire (sans justification) l'estimateur $\hat{a}_n$ de a donné par les équations de Yule-Walker lorsque $|a| < 1$. Quelles sont ses propriétés ?

On suppose maintenant que $|a| > 1$. On considère l'estimateur $\hat{a}_n$ défini ci-dessus, et l'on veut connaître ses propriétés dans ce cas.

(iii) On pose $\theta = 1/a$. Montrer que la solution stationnaire de l'équation (1) est donnée par

$$X_n = -\sum_{j=1}^{\infty} \theta^j \epsilon_{n+j} \ . \tag{2}$$

(iv) Calculer la fonction d'autocovariance et la densité spectrale du processus $\{X_n\}$ en fonction de θ puis de a. (Indication : on pourra utiliser l'équation (2).) Quelle est l'équation de récurrence vérifiée par γ ?

(v) Déterminer en fonction de θ puis de a la limite des estimateurs empiriques $\hat{\gamma}_n(0)$ et $\hat{\gamma}_n(1)$, puis de $\hat{a}_n$.

Exercice 2. Soit $\{U_n\}$ un bruit blanc centré de variance σ^2 et soit $\{Y_n\}$ le processus défini par

$$Y_n = U_n + \frac{1}{2}U_{n-1} \ , \ n \in \mathbb{Z} \ .$$

(i) Déterminer la densité spectrale f_Y de $\{Y_n\}$.

(ii) Déterminer la fonction d'autocovariance γ de $\{Y_n\}$.

(iii) Le processus $\{Y_n\}$ est-il inversible par rapport au bruit blanc $\{U_n\}$? Le cas échéant, donner l'expression de U_n en fonction de $\{Y_k, k \leq n\}$.

(iv) Déterminer la variance de l'erreur de prédiction à un pas sur passé infini.

(v) Soit a un nombre réel tel que $|a| < 1$. On pose

$$X_n = Y_n + aX_{n-1} \ .$$

Justifier que l'on peut exprimer X_n en fonction de $\{Y_k, k \leq n\}$ et donner cette expression.

(vi) Déterminer la densité spectrale f_X du processus $\{X_n\}$.

(vii) Justifier que l'on peut exprimer X_n en fonction de $\{U_k, k \leq n\}$ et donner cette expression.

(viii) Quelle est la nature du processus $\{X_n\}$?