Université de Paris X Nanterre — Année 2005-2006

MASTER ISIFAR

Corrigé de l'examen de séries chronologiques du 5 juin 2006

Exercice 1. Soit $\{X_n\}$ un processus stationnaire au second ordre. On suppose que $\{X_n\}$ est un processus AR(1), qui vérifie l'équation

$$X_n = aX_{n-1} + \epsilon_n \ ,$$

où $\{\epsilon_n\}$ est une suite de variables i.i.d. centrées de variance σ^2 et $|a| < 1$.

(i) Calculer l'autocorrélation $\rho(1)$ en fonction de a si le modèle est correct.

Correction. Si le modèle est correct, on a $\gamma(0) = \sigma^2/(1 - a^2)$ et $\gamma(k) = a^k\gamma(0)$. D'où $\rho(1) = a$.

(ii) Définir l'estimateur empirique $\hat{a}_n$ de a basé sur la fonction d'autocovariance empirique, calculée sur n observations. Quelle est la limite a^* de l'estimateur $\hat{a}_n$ lorsque n converge vers l'infini ?

Correction. On pose tout simplement $\hat{a}_n = \hat{\rho}_n(1)$, où $\hat{\rho}_n(1)$ est l'autocorrélation empirique. On sait qu'il est consistant, c'est-à-dire que $a^* = \lim_{n\to\infty} \hat{\rho}_n(1) = \rho(1) = a$, p.s.

(iii) Quelle est la nature du processus $X_n - a^*X_{n-1}$ si $\beta = 0$. Suggérer un test pour valider l'hypothèse de modèle AR(1).

Correction. Si le modèle est correct, alors $X_n - aX_{n-1} = \epsilon_n$ est un bruit blanc. On peut donc tester l'adéquation du modèle en calculant les autocorrélations empiriques $\hat{\hat{\rho}}_n(j)$ des résidus $\hat{\epsilon}_k = X_k - \hat{a}_nX_{k-1}$. Pour q fixé, ni trop grand ni trop petit, on pose $T_n = \hat{\hat{\rho}}_n(1) + \cdots + \hat{\hat{\rho}}_n(q)$. Si le modèle est correct, T_n suit approximativement la loi du χ^2 à q degrés de liberté. La région de rejet de l'hypothèse de modèle AR(1) est donc de la forme $T_n > t$, où t est un quantile bien choisi de la loi du χ^2.

Le processus $\{X_n\}$ est en fait un processus AR(2) inversible causal solution de l'équation

$$X_n - \alpha X_{n-1} - \beta X_{n-2} = \epsilon_n \ ,$$

(iv) Montrer que pour que le processus soit causal, il est nécessaire d'avoir $|\beta| < 1$.

Correction. Pour que le processus soit causal, il faut que les racines du polynôme $P(z) = 1 - \alpha z - \beta z^2$ soient hors du disque unité. Le produit des racines étant égal $-1/\beta$, on doit donc avoir $|1/\beta| > 1$, i.e. $|\beta| < 1$.

(v) Ecrire les équations de Yule Walker reliant α, β, $\rho(1)$ et $\rho(2)$.

Correction.

$$\rho(1) = \alpha + \beta\rho(1) \ ,$$
$$\rho(2) = \alpha\rho(1) + \beta \ .$$

(vi) Exprimer les autocorrélations $\rho(1)$ et $\rho(2)$ en fonction de α et β.

Correction.

$$\rho(1) = \frac{\alpha}{1-\beta} \ , \quad \rho(2) = \frac{\alpha^2}{1-\beta} + \beta \ .$$

(vii) L'estimateur $\hat{a}_n$ étant toujours défini comme précédemment, quelle est maintenant sa limite a^* lorsque n tend vers l'infini ? On vérifiera que l'on retrouve le résultat de la question (ii) dans le cas $\beta = 0$.

Correction. $\lim_{n\to\infty} \hat{a}_n = \lim_{n\to\infty} \hat{\rho}_n(1) = \rho(1) = \alpha/(1-\beta)$. Si $\beta = 0$, on retrouve bien le résultat précédent.

Soient $\hat{\alpha}_n$ et $\hat{\beta}_n$ les estimateurs de Yule Walker de α et β. On rappelle que $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$ suit asymptotiquement la loi gaussienne bidimensionnelle centrée de matrice de covariance $\sigma^2\Gamma_2^{-1}$ où Γ_2 est la matrice

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) \end{pmatrix} .$$

(viii) Déterminer Γ_2^{-1} en fonction de $\gamma(0)$ et $\rho(1)$.

Correction.

$$\Gamma_2^{-1} = \frac{1}{\gamma^2(0) - \gamma^2(1)} \begin{pmatrix} \gamma(0) & -\gamma(1) \\ -\gamma(1) & \gamma(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma(0)(1-\rho^2(1))} \begin{pmatrix} 1 & -\rho(1) \\ -\rho(1) & 1 \end{pmatrix} .$$

(ix) Déterminer en fonction de α et β la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$.

Correction. C'est la loi gaussienne centrée de variance

$$\frac{1-\alpha^2}{1-(\alpha/(1-\beta))^2} .$$

(x) Déterminer la loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\beta}$ si $\beta = 0$.

Correction. C'est la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(xi) En déduire un autre test pour valider le modèle AR(1).

Correction. Sous l'hypothèse AR(1), la loi limite de $\sqrt{n}\hat{\beta}_n$ est la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Une région de rejet de l'hypothèse AR(1) est donc $\sqrt{n}|\hat{\beta}_n| > u$, où u est un quantile de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 2. Soit $\{U_n\}$ un bruit blanc centré de variance σ^2 et soit $\{Y_n\}$ le processus défini par

$$Y_n = U_n + 2U_{n-1} \ , \ n \in \mathbb{Z} .$$

(i) Déterminer la densité spectrale de $\{Y_n\}$.

Correction. $f(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}(5 + 4\cos(x))$.

(ii) Déterminer la fonction d'autocovariance de $\{Y_n\}$.

Correction. $\gamma(0) = \sigma^2(1+a^2)$; $\gamma(1) = a\sigma^2$; $\gamma(k) = 0$, $k \geq 2$.

(iii) Calculer la variance τ^2 de l'erreur de prédiction à un pas sur passé infini.

Correction.

$$\log\frac{\tau^2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f(x)\,\mathrm{d}x = \log\frac{4\sigma^2}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|^2 \mathrm{d}x = \log\frac{4\sigma^2}{2\pi} ,$$

d'où $\tau^2 = 4\sigma^2$.

(iv) On pose $V_n = \sum_{j=0}^{\infty} (-2)^{-j} Y_{n-j}$. Exprimer V_n en fonction de $\{U_k, k \leq n\}$.

Correction. Posons $a = 2$ et $\theta = -1/a = -1/2$.

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j (U_{n-j} + aU_{n-j-1}) = U_n + \sum_{j=1}^{\infty} (\theta^j + a\theta^{j-1}) U_{n-j} \\ &= U_n + (1 + a/\theta) \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j \, U_{n-j} = U_n + (1 - a^2) \sum_{j=1}^{\infty} (-a)^{-j} \, U_{n-j} \\ &= U_n - 3 \sum_{j=1}^{\infty} (-1/2)^j \, U_{n-j} \; . \end{aligned}$$

(v) Calculer $\mathrm{var}(V_n)$ et la fonction d'autocovariance de $\{V_n\}$. (On pourra utiliser la définition de $\{V_n\}$ ou la réponse à la question précédente.

Correction. On utilise l'expression de V_n en fonction de $\{U_n\}$ et le fait que $\{U_n\}$ est un bruit blanc. Posons $V_n = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j U_{n-j}$. On sait alors, pour l'avoir vu infiniment souvent en cours, que l'on a

$$\mathrm{cov}(V_n, V_{n+k}) = \sum_{j,j'=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j'} \mathrm{cov}(U_{n-j}, U_{n+k-j'}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \; .$$

Pour $k = 0$, on a donc

$$\mathrm{var}(V_n) = \sigma^2 \left\{ 1 + (1 - a^2)^2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1/a)^{2j} \right\} = \sigma^2 \left\{ 1 + (1 - a^2)^2 a^{-2} / (1 - a^{-2}) \right\} = \sigma^2 a^2 \; .$$

Pour $k > 0$, on a

$$\begin{aligned} \sigma^{-2} \mathrm{cov}(V_n, V_{n+k}) &= (1 - a^2)(-a)^k + (1 - a^2)^2 \sum_{j=1}^{\infty} (-a)^{2j+k} \\ &= (1 - a^2)(-a)^k + (1 - a^2)^2 (-a)^k a^{-2} / (1 - a^{-2}) = 0 \; . \end{aligned}$$

$\{V_n\}$ est donc un bruit blanc de variance $a^2 \sigma^2$. C'est un bon candidat pour être l'innovation du processus $\{Y_n\}$.

(vi) Montrer que $Y_n = V_n + \frac{1}{2} V_{n-1}$.

Correction.

$$V_n + \frac{1}{2} V_{n-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j Y_{n-j} - \theta \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j Y_{n-1-j} = Y_n + \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j Y_{n-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \theta^{j+1} Y_{n-j-1} = Y_n \; .$$

(vii) Soit $\hat{Y}_{n+1,n}$ la prédiction de Y_{n+1} sur le passé $\{Y_k, k \leq n\}$. Déterminer l'erreur de prédiction $\hat{Y}_{n+1,n} - Y_{n+1}$.

Correction. Puisque le processus est inversible et causal par rapport à son innovation $\{V_n\}$, on a $\hat{Y}_{n+1,n} - Y_{n+1} = V_n$.