Université de Paris X Nanterre 5 juin 2006
MASTER ISIFAR

Examen de séries chronologiques

Tous documents et tous matériels électroniques interdits.

DUREE 2 HEURES

Exercice 1. Soit $\{X_n\}$ un processus stationnaire au second ordre. On suppose que $\{X_n\}$ est un processus AR(1), qui vérifie l'équation

$$X_n = aX_{n-1} + \epsilon_n ,$$

où $\{\epsilon_n\}$ est une suite de variables i.i.d. centrées de variance σ^2.

(i) Calculer l'autocorrélation $\rho(1)$ en fonction de a si le modèle est correct.

(ii) Définir l'estimateur empirique $\hat{a}_n$ de a basé sur la fonction d'autocovariance empirique, calculée sur n observations. Quelle est la limite a^* de l'estimateur $\hat{a}_n$ lorsque n converge vers l'infini ?

(iii) Quelle est la nature du processus $X_n - a^* X_{n-1}$. Suggérer un test pour valider l'hypothse le modèle AR(1).

Le processus $\{X_n\}$ est en fait un processus AR(2) inversible causal, solution de l'équation

$$X_n - \alpha X_{n-1} - \beta X_{n-2} = \epsilon_n ,$$

(iv) Montrer que pour que le processus soit causal, il est nécessaire d'avoir $|\beta| < 1$.

(v) Ecrire les équations de Yule Walker reliant α, β, $\rho(1)$ et $\rho(2)$.

(vi) Exprimer les autocorrélations $\rho(1)$ et $\rho(2)$ en fonction de α et β.

(vii) L'estimateur $\hat{a}_n$ étant toujours défini comme précédemment, quelle est maintenant sa limite a^* lorsque n tend vers l'infini ? On vérifiera que l'on retrouve le résultat de la question (ii) dans le cas $\beta = 0$.

Soient $\hat{\alpha}_n$ et $\hat{\beta}_n$ les estimateurs de Yule Walker de α et β. On rappelle que $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$ suit asymptotiquement la loi gaussienne bidimensionnelle centrée de matrice de covariance $\sigma^2 \Gamma_2^{-1}$ où Γ_2 est la matrice

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) \end{pmatrix} .$$

(viii) Déterminer Γ_2^{-1} en fonction de $\gamma(0)$ et $\rho(1)$.

(ix) Déterminer la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ en fonction de α et β.

(x) Déterminer la loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\beta}$ si $\beta = 0$.

(xi) En déduire un autre test pour valider le modèle AR(1).

Exercice 2. Soit $\{U_n\}$ un bruit blanc centré de variance σ^2 et soit $\{Y_n\}$ le processus défini par

$$Y_n = U_n + 2U_{n-1}\ ,\ \ n \in \mathbb{Z}\ .$$

(i) Déterminer la densité spectrale de $\{Y_n\}$.

(ii) Déterminer la fonction d'autocovariance de $\{Y_n\}$.

(iii) Calculer la variance τ^2 de l'erreur de prédiction à un pas sur passé infini.

(iv) On pose

$$V_n = \sum_{j=0}^{\infty} (-2)^{-j} Y_{n-j}\ .$$

Exprimer V_n en fonction de $\{U_k, k \leq n\}$.

(v) Calculer $\mathrm{var}(V_n)$ et la fonction d'autocovariance de $\{V_n\}$. (On pourra utiliser la définition de $\{V_n\}$ ou la réponse à la question précédente.

(vi) Montrer que $Y_n = V_n + \frac{1}{2}V_{n-1}$.

(vii) Soit $\hat{Y}_{n+1,n}$ la prédiction de Y_{n+1} sur le passé $\{Y_k, k \leq n\}$. Déterminer l'erreur de prédiction $\hat{Y}_{n+1,n} - Y_{n+1}$.