

Interrogation d'optimisation combinatoire

Durée 1h, le 13 avril 2005

Le barème est indicatif

Exercice 1 Consommation d'énergie(5 points)

On se donne une suite de n tâches. On connaît pour chaque tâche i sa durée p_i lorsqu'elle est effectuée par une machine de vitesse 1. Ces tâches doivent être effectuées dans l'ordre $1, 2, \dots, n$ par une machine qui peut être plus ou moins rapide selon la quantité d'énergie qu'on dépense.

On dispose de K vitesses différentes et entières $1 \leq v_1 \leq \dots \leq v_K$. A chaque vitesse v_j correspond deux coefficients b_j (coût fixe) et c_j (coût variable), de sorte que chaque tâche i , lorsqu'elle est effectuée à vitesse v_j dure $\frac{p_i}{v_j}$ et coûte en énergie $c_j p_i + b_j$.

On cherche à associer à chaque tâche une vitesse de la machine, de sorte que la durée totale de l'ensemble des tâches ne dépasse pas une valeur donnée D (on supposera que $\frac{\sum_{i=1}^n p_i}{v_K} \leq D \leq \sum_{i=1}^n p_i$), et la dépense totale d'énergie soit minimale.

1 Modéliser ce problème à l'aide d'un programme mathématique.

2 Décrire le modèle associé aux données numériques suivantes :

Tâches :	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">i</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">5</td><td style="padding: 2px 10px;">6</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">p_i</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td></tr> </table>	i	1	2	3	4	5	6	p_i	3	1	2	2	4	3	vitesses :	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">j</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">v_j</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">b_j</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">c_j</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">5</td></tr> </table>	j	1	2	3	v_j	1	2	4	b_j	1	2	3	c_j	1	3	5	$D = 7$
i	1	2	3	4	5	6																												
p_i	3	1	2	2	4	3																												
j	1	2	3																															
v_j	1	2	4																															
b_j	1	2	3																															
c_j	1	3	5																															

Exercice 2 Sac à dos (5 points)

Appliquez la méthode de programmation dynamique vue en cours pour résoudre le problème de sac à dos suivant, avec $P = 7$

i	1	2	3	4	5	6
w_i	18	5	10	8	12	18
p_i	3	1	2	2	4	6