N. CHEZE et D. ABECASSIS **Exercices repris ou adaptés de G. NEUBERG**

.

MOYENNES, CROISSANCE, INDICES

Rappels : moyennes pondérées d'ordre r

La moyenne d'ordre $r(r \neq 0)$ *de la série statistique positive* $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ *est le nombre dont la puissance r est la moyenne arithmétique des puissances r des* x_i. *Si* M_r *est ce nombre, il est défini par* $M_r = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right]^{1/r}$ *pour* $r \neq 0$. *Cette définition repose sur des poids uniformes pour les valeurs de la série statistique. Si on retient une pondération quelconque* $\alpha_i \geq 0, \sum_i \alpha_i = 1,$ *la définition de la moyenne pondérée devient* $M_r = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^r\right]^{1/r}$. *Pour r=1, on obtient évidemment la moyenne arithmétique, pour r=2 on parle de moyenne quadratique et pour r=-1 de moyenne harmonique.*

La moyenne d'ordre 0 est obtenue par un passage à la limite avec la définition précédente. On peut prouver que $M_0 = \lim_{r\to 0,\, r\neq 0} M_r = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$. *La moyenne d'ordre 0 est appelée moyenne géométrique.*

On peut démontrer que la moyenne d'ordre r est une fonction croissante de r, pour des valeurs données des poids α_i *et des* x_i. *Ce résultat découle des propriétés de convexité des fonctions puissances d'exposant supérieur à un. Par exemple, pour des poids et valeurs données, la moyenne harmonique est toujours plus petite que la moyenne géométrique, elle-même plus petite que la moyenne arithmétique qui est enfin majorée par la moyenne quadratique. Ce résultat est la traduction des inégalités* $M_{-1} \leq M_0 \leq M_1 \leq M_2$.

Chacune des moyennes pondérées d'ordre r est encadrée par le minimum et le maximum des valeurs de la statistique. On peut en fait prouver le résultat suivant (dans la mesure où les poids sont strictement positifs) :

$$\lim_{r\to\infty} M_r = \max_{i=1,\cdots,n} x_i; \quad \lim_{r\to-\infty} M_r = \min_{i=1,\cdots,n} x_i$$

Première partie : moyennes, croissance

Exercice 1

1. Calculer les moyennes harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique de $x_1 = 2$ et $x_2 = 14$ quand $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$. Vérifier les inégalités $M_{-1} \leq M_0 \leq M_1 \leq M_2$.
2. Expliciter les inégalités $M_{-1} \leq M_0 \leq M_1 \leq M_2$ quand *n=2* pour x_1, x_2 quelconques et quand $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$. Les prouver ensuite, et montrer que les inégalités sont strictes si $x_1 \neq x_2$.

Exercice 2

En donnant en entrée par exemple « évolution salaires privé INSEE », à un moteur de recherches sur Internet, vous trouverez facilement l'article intitulé « les salaires dans les entreprises en 2004 » paru en février 2006 dans la revue INSEE PREMIERE. Cet article résume l'évolution du pouvoir d'achat des salaires du secteur privé. Il donne des résultats en moyenne globale et par secteur de qualification.

Evolution en francs constants des salaires pour les emplois à temps complet

Evolutions en %	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**
Salaire moyen net (s_t)	0,9	1,6	0,5	1,1	0,6	-0,3	0
Indice des prix à la consommation (p_t)	0,7	0,5	1,7	1,7	1,9	2,1	2,1
Salaire moyen net à structure constante	0,6	1	-0,1	0,4	-0,2	-0,8	-0,4
Incidence des effets de structure	0,3	0,6	0,6	0,7	0,8	0,5	0,4

En désignant par S_t le salaire moyen « sur la feuille de paye » d'une personne pendant l'année *t* (appelé salaire nominal ou salaire en euros courants), on appelle salaire en euros constants de l'année *t* (ou salaire réel) la grandeur $s_t = S_t / p_t$ obtenue en divisant le salaire nominal de l'année *t* par l'indice des prix à la consommation p_t.
Le taux de variation de p_t est noté π_t. C'est le taux d'inflation de l'année *t*. Les taux de variation des salaires S_t et s_t sont notés respectivement par γ_t et g_t. Le taux de variation de s_t mesure l'évolution du pouvoir d'achat.
L'objet de l'exercice est de relier l'évolution du salaire nominal et du salaire réel (« feuille de paye » et pouvoir d'achat), et de définir l'effet de structure dans le tableau.

1.1 Quelle est la relation liant ces trois taux de variation ?

1.2 On considère l'évolution des trois variables S, s et p sur plusieurs années. Quelle relation lie les trois taux de variation annuels moyens ?

1.3 A partir des données du tableau ci-dessus, calculer le taux de variation annuel moyen du salaire net sur les 7 années considérées ainsi que le taux d'inflation annuel moyen sur la même période. En déduire le taux de variation annuel moyen du salaire nominal.

On suppose que la population des salariés du privé est stratifiée en classes définies par des niveaux hiérarchiques ou de qualification. Ces niveaux sont indicés par h, $h = 1, \cdots, H$. Le nombre de salariés au niveau h durant l'année t (comptés en année à temps plein) est égal à n_t^h, et le salaire moyen correspondant est égal à s_t^h.

1.4 Montrer que le salaire moyen durant l'année t, s_t, est égal à une moyenne arithmétique des s_t^h pondérés par des poids α_t^h que l'on précisera.

1.5 En notant $s_t^* = \sum_{h=1}^{H} \alpha_{t-1}^h \, s_t^h$ et en écrivant $s_t / s_{t-1} = \left(s_t / s_t^*\right) \times \left(s_t^* / s_{t-1}\right)$, montrer que le facteur de variation des salaires réels est le produit de deux facteurs: l'un dû à l'évolution des salaires réels à structure constante et l'autre dû à l'évolution de la structure des effectifs dans les classes. Expliquer alors les deux dernières lignes du tableau, et calculer le taux de variation annuel moyen du salaire moyen net à structure constante.

Deuxième partie : Indices

Exercice 1

On désigne respectivement par q_t^a, q_t^b, p_t^a et p_t^b les quantités et prix unitaires de deux produits a et b vendus par une entreprise durant le trimestre t.

On suppose que l'entreprise révise ses prix uniquement au début de chaque trimestre, et on s'intéresse aux quatre trimestres $t = 1, 2, 3, 4$ d'une année. On choisit le quatrième trimestre de l'année précédente $(t = 0)$ comme période de base et on donne : $p_0^a = 5000$F/tonne; $p_0^b = 2500$F/tonne; $q_0^a = 4$ tonnes; $q_0^b = 2$ tonnes.

1. Entre les trimestres 0 et 1, le prix du produit a a augmenté de 2,5% et celui de b a baissé de 10%. Calculer les indices élémentaires de prix de chaque produit (base 100 en $t = 0$). Calculer l'indice de Laspeyres des prix $L_{1/0}(p)$. Quel est le pourcentage du chiffre d'affaires réalisé avec chaque produit au trimestre 0 ?
2. Sachant que le chiffre d'affaires a augmenté de 0,72% entre $t = 0$ et $t = 1$, quelle relation lie les deux quantités q_1^a et q_1^b ?
3. Sachant que la quantité de produit a vendue n'a pas varié entre $t = 0$ et $t = 1$, calculer l'indice de Paasche des prix $P_{1/0}(p)$. Quel est le pourcentage du chiffre d'affaires réalisé avec les produits a et b au premier trimestre ?
4. Entre les trimestres 1, 2, 3 et 4, les prix ont été révisés de la manière suivante : +2,5%, 3%, 2% pour le produit a, +3%, 0%, 2% pour le produit b. Calculer le taux de croissance annuel du prix de chaque produit, ainsi que le taux de croissance trimestriel moyen. Calculer $L_{4/0}(p)$.
5. Sachant que le pourcentage du chiffre d'affaires réalisé avec le produit a au quatrième trimestre est de 79%, calculer $P_{4/0}(p)$.

Exercice 2

Une entreprise exporte trois produits $a, b,$ et c dont les prix unitaires et les quantités pour les deux périodes $t = 0,1$ figurent dans le tableau ci-dessous.

	t=0		t=1	
h	p_0^h	q_0^h	p_1^h	q_1^h
a	10	200	12	200
b	20	300	23	330
c	30	200	33	150

1. Calculer l'indice de Laspeyres $L_{1/0}(p)$ des prix des produits exportés à la période 1, base 100 à la période 0. En déduire une mesure de la hausse moyenne des prix.
2. Calculer l'indice de valeur $I_{1/0}(V)$. En déduire l'indice de Paasche $P_{1/0}(q)$ des quantités exportées.
3. Les indices de Laspeyres et de Paasche peuvent respectivement s'écrire comme une moyenne arithmétique et comme une moyenne harmonique d'indices élémentaires. Calculer et interpréter les coefficients de pondération utilisés dans les deux cas.
4. Entre les périodes 1 et 2, les prix des produits $a, b,$ et c ont respectivement augmenté de 8, 10 et 12%. Calculer $L_{2/1}(p)$ et $L_{2/0}(p)$. L'indice de Laspeyres est-il transitif ? Comment fait-on pour construire un indice transitif ?

Exercice 3

La société CORIM vend quatre types de micro-ordinateurs $(h = a, b, c, d)$.
On désigne respectivement par p_t^h et q_t^h le prix et le nombre des ordinateurs vendus durant l'année t par la société. Le chiffre d'affaires de la société est donc $V_t = \sum_h p_t^h q_t^h$. Le tableau ci-dessous présente pour les années $t = 0$ et $t = 1$:

- Les prix unitaires p_t^h des ordinateurs.
- Les poids de chaque type d'ordinateur dans le chiffre d'affaires de l'année t, soit $\alpha_t^h = p_t^h q_t^h / V_t$.

	t=0		t=1	
h	p_0^h	α_0^h (%)	p_1^h	α_1^h (%)
a	800 €	40	720 €	10
b	1200 €	30	960 €	20
c	2400 €	10	2000 €	30
d	2880 €	20	2400 €	40

1. Calculer les indices de Laspeyres et de Paasche des prix $L_{1/0}(p)$ et $P_{1/0}(p)$. En déduire les taux de variation des prix, mesurés par ces deux indices, et l'indice de Fisher $F_{1/0}(p)$.

2. L'année 0, le chiffre d'affaires de la société était de 2,16 millions d'euros. Il a doublé l'année suivante. Calculer et interpréter les indices de Laspeyres et de Paasche des quantités $L_{1/0}(q)$ et $P_{1/0}(q)$. En déduire l'indice de Fisher $F_{1/0}(q)$.

3. Le nombre total de micro-ordinateurs vendus l'année 0 est égal à $Q_0 = \sum_h q_0^h = 1860.$ L'année suivante, ce nombre passe à 2868. Calculer le prix moyen d'un ordinateur vendu l'année 0, puis l'année 1. En déduire une décomposition de l'indice du chiffre d'affaires en un indice de la quantité totale et un indice du prix moyen.

4. Décomposer l'indice du chiffre d'affaires en un indice de la quantité totale, un indice de Laspeyres des prix et un indice de qualité.

Exercice 4

Un investisseur dispose d'un portefeuille d'actions réparties sur *H* marchés différents et libellées dans autant de devises (euro, dollar, livre, yen,…). Exprimé en euros, la valeur du portefeuille est égale à V_t en t, avec :

$V_0 = 2\,M\,€;\quad V_1 = 2{,}08\,M\,€;\quad V_2 = 2{,}214\,M\,€.$

1. Si les actions cotées sur le marché h ont une valeur q_t^h en *t* dans la devise associée au marché *h,* et si p_t^h est le taux de change en euros de cette devise à la période *t*, (i.e. une unité de devise vaut p_t^h euros), montrer que $V_t = \sum_{h=1}^{H} p_t^h q_t^h$.

2. La valeur du portefeuille calculée en *t=1* avec les taux de change de la période précédente étant égale à $V_1^* = \sum_h p_0^h q_1^h = 2{,}1\,M\,€$, décomposer l'indice de valeur du portefeuille $I_{1/0}(V)$ en un indice mesurant l'évolution du cours des devises entre *t=0* et *t=1*, et un autre indice mesurant l'évolution du cours des actions. Répéter le calcul de la période 1 à la période 2, sachant que $V_2^* = \sum_h p_1^h q_2^h = 2{,}08\,M\,€$. Commenter les résultats obtenus.

3. Montrer que ces informations permettent de décomposer l'indice de valeur $I_{2/0}(V)$ en un indice-chaîne des taux de changes et un indice-chaîne des cours dans les monnaies d'origine. Calculer les deux indices-chaînes et commenter les résultats.

4. Quelle autre décomposition aurait-on pu faire si les valeurs $\sum_h p_1^h q_0^h$ et $\sum_h p_2^h q_1^h$ avaient été disponibles ?

Exercice 5

1. Rappeler la définition de réversibilité d'un indice. Quels indices sont réversibles ?

2. Prouver les égalités $L_{0/1}(p) = \dfrac{1}{P_{1/0}(p)};\quad P_{0/1}(p) = \dfrac{1}{L_{1/0}(p)}$. En déduire que les indices de Laspeyres et Paasche ne sont pas réversibles, mais que l'indice de Fisher est réversible.

3. Montrer que la transitivité d'un indice implique la réversibilité. La réciproque est-elle vraie ?