Université Paris Ouest Nanterre La Défense
Master ISIFAR 1
Formulaire de travaux dirigés de séries chronologiques

0 Préambule

Exercice 1 Variables aléatoires complexes
Si A et B sont deux variables aléatoires réelles, on appelle variable aléatoire complexe $Z = A + iB$. On définit $\mathbb{E}[Z]$ comme le nombre complexe $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[A] + i\mathbb{E}[Z]$.

1) On suppose dans cette question que A et B sont deux variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{E}[A] = 1$, $\mathbb{E}[B] = 2$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[A] = 1$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[B] = 1$ et $\mathbb{C}\mathrm{ov}[A, B] = 0$. On pose $Z = A + iB$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $(Z - \mathbb{E}[Z])^2$, et donner $\mathbb{E}[(Z-\mathbb{E}[Z])^2]$ puis $\mathbb{E}[|Z-\mathbb{E}[Z]|^2]$. Refaire les mêmes calculs avec $\mathbb{V}\mathrm{ar}[B] = 2$, puis avec $\mathbb{V}\mathrm{ar}[B] = 1$ et $\mathbb{C}\mathrm{ov}[A, B] = 1$. Que remarque-t-on ?
2) Si Z est une variable aléatoire complexe, on définit $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z]$ comme $\mathbb{E}[|Z - \mathbb{E}[Z]|^2]$. Montrer qu'on a toujours $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] \in \mathbb{R}^+$ et que $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z]$ vaut 0 si et seulement si Z est une variable aléatoire constante. A-t-on $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2$?
3) On suppose dans cette question que A, A', B et B' sont quatre variables aléatoires réelles centrées, de variance finie et telles que $\mathbb{C}\mathrm{ov}[A, B'] = \mathbb{C}\mathrm{ov}[A', B] = 0$. On pose $Z = A + iB$ et $Z' = A' + iB'$. Montrer que
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z + Z'] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[Z'] + 2\mathbb{E}[Z\bar{Z}'].$$
4) Si Z et Z' sont deux variables aléatoires complexes, on définit leur covariance comme
$$\mathbb{C}\mathrm{ov}[Z, Z'] = \mathbb{E}\Big[(Z - \mathbb{E}[Z])(\bar{Z}' - \mathbb{E}[\bar{Z}'])\Big].$$
Montrer que $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] = \mathbb{C}\mathrm{ov}[Z, Z]$. Donner $\mathbb{C}\mathrm{ov}[Z, Z']$ en fonction de $\mathbb{E}[Z\bar{Z}']$, $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathbb{E}[Z']$. Si k est un nombre complexe, a-t-on $\mathbb{C}\mathrm{ov}[kZ, Z'] = \mathbb{C}\mathrm{ov}[Z, kZ'] = k\,\mathbb{C}\mathrm{ov}[Z, Z']$?
5) Soient θ et θ' deux variables aléatoires réelles indépendantes et de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Z = \exp(i\pi\theta)$ et $Z' = \exp(-i\pi\theta')$. Calculer $\mathbb{E}[Z]$, $\mathbb{E}[Z^2]$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z]$, $\mathbb{E}[ZZ']$ et $\mathbb{C}\mathrm{ov}[Z, Z']$.

Exercice 2 Suites récurrentes linéaires
On se donne deux réels a et b et on considère l'ensemble E des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout entier naturel n.

1) Si $b = 0$, quel est l'ensemble E ?
2) On suppose désormais $b \neq 0$. On suppose qu'on connaît deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E telles que les vecteurs (v_0, v_1) et (w_0, w_1) sont non colinéaires dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E, alors il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que pour tout entier naturel n, $u_n = \lambda_1 v_n + \lambda_2 w_n$.

3) On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ possède deux racines réelles distinctes r et r'. Montrer qu'alors les suites (r^n) et (r'^n) sont dans E.

4) On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ possède une racine double réelle r. Montrer qu'alors les suites (r^n) et (nr^n) sont dans E.

Exercice 3 Déterminants Calculer les déterminants des matrices ci-dessous.

1)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

2) Pour n entier,
$$B_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On pourra chercher à se ramener à l'exercice précédent.

Exercice 4 Convergence d'intégrales, intégrales doubles

1) Soit pour $n \in \mathbb{N}$ f_n la fonction définie par $f_n(x) = 1$ si $n \leq x \leq n+1$ et $f(x) = 0$ sinon. A-t-on $\lim_n \int_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lim_n f_n(x)\mathrm{d}x$?

2) Donner
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^{-2k}}{(2k)!}.$$

3) Calculer
$$\int_0^\infty \int_1^2 \mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4) A-t-on
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,?$$

1 Stationnarité, autocovariance

Exercice 5 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. La variable X_n suit une loi normale centrée réduite si n est pair ou une loi uniforme $\mathcal{U}([-\sqrt{3},+\sqrt{3}])$ si n est impair. Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire au sens strict ? au sens large ?

Exercice 6 1) Soit w un réel non nul. Montrer que le processus défini par $X_t = A\cos(wt) + B\sin(wt)$ pour $t \in \mathbb{Z}$ est stationnaire, avec A et B des v.a. réelles centrées réduites de carré intégrable et orthogonales.

2) Généraliser à $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(A_i\cos(w_i t) + B_i\sin(w_i t))$ avec A_i et B_j orthogonales.

Exercice 7 Soient Z_t, $t \in \mathbb{Z}$, des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, et soient a, b, c des constantes réelles. Les processus suivants sont-ils stationnaires ? Si oui, donner leur fonction d'autocovariance.

1) $X_t = a + bZ_t + cZ_{t-1}$
2) $X_t = a + bZ_0$
3) $X_t = Z_1\cos(ct) + Z_2\sin(ct)$
4) $X_t = Z_0\cos(ct)$
5) $X_t = Z_t\cos(ct) + Z_{t-1}\sin(ct)$
6) $X_t = Z_t Z_{t-1}$

Exercice 8 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ le processus défini sur $\mathbb{Z}$ par $X_n = \sin(2\pi nU)$ où U suit une loi uniforme sur $[0,1[$.

1) $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire au sens large ?
2) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-il stationnaire au sens large ?
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n est indépendante de n.

Exercice 9 Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus stationnaires non corrélés. Montrer que le processus $(X_t + Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. Quelle est sa fonction d'autocovariance ?

Exercice 10 Soit Y une v.a. réelle. Donner des conditions sur Y pour que les processus suivants soient stationnaires au sens strict, au sens large.

1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $X_n = Y$
2) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $X_n = (-1)^n Y$
3) Soit $\lambda_0 \in]-\pi,\pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $X_n = \mathrm{e}^{in\lambda_0}Y$

Exercice 11 Soit q un entier supérieur ou égal à 1, soient μ, θ_1, $\ldots$, θ_q des réels, et soit pour $t \in \mathbb{Z}$ le processus $X_t = \epsilon_t + \sum_{j=1}^{q}\theta_j\epsilon_{t-j} + \mu$ avec (ϵ_t) un bruit blanc de variance σ^2.

1) Le processus (X_t) est-il stationnaire ?

2) Calculer sa fonction d'autocovariance.
3) Donner un estimateur sans biais et convergent de μ.

Exercice 12 Soit $(\epsilon_t)_{t=1,2,\ldots}$ une suite de v.a. indépendantes entre elles, centrées et de variance σ^2. Calculer l'espérance et la covariance du processus

$$X_t = \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i, \ t \geq 1.$$

Montrer que ce processus n'est pas stationnaire au sens large. Suggérer une transformation pour rendre ce processus stationnaire.

Exercice 13 On considère le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$X_t = a + bt + \epsilon_t$$

où (ϵ_t) est un bruit blanc de variance σ^2. À quelles conditions ce processus est stationnaire ? Que peut-on dire du processus différence première $(X_t - X_{t-1})$?

Exercice 14 On considère le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$X_t = (-1)^t + \epsilon_t$$

où (ϵ_t) est un bruit blanc de variance σ^2. Montrer que ce processus n'est pas stationnaire. Suggérer une transformation pour rendre ce processus stationnaire.

Exercice 15 On considère le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$X_t = 2 + 3t + \cos(\pi t/2) + \epsilon_t$$

où (ϵ_t) est un bruit blanc de variance σ^2. Montrer que ce processus n'est pas stationnaire. Suggérer une transformation pour rendre ce processus stationnaire.

2 Mesure spectrale, densité spectrale

Exercice 16 Les fonctions $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ suivantes sont-elles des fonctions d'autocovariance de processus stationnaires ?

1) $\gamma(k) = 1 + |k|$
2) $\gamma(k) = 1 + \sin(4k)/4$
3) $\gamma(k) = 1$ si $|k| \leq 1$, $\gamma(k) = 0$ sinon
4) $\gamma(k) = (-1)^k + \cos(2k)/2$
5) $\gamma(k) = (-1)^k + \sin(2k)/2$.

Exercice 17 Soient a et b deux réels non nuls, et soit $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\gamma(0) = a,\ \gamma(2) = \gamma(-2) = b,\ \text{ et }\ \gamma(n) = 0\ \text{ si }\ |n| \neq 2\ \text{ et }\ |n| \neq 2.$$

1) À quelles conditions sur a et b est-ce que γ est la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire ? Quelle est la densité spectrale associée ?

   On suppose ces conditions remplies. On se demande s'il existe un processus stationnaire du second ordre (X_n) de la forme $X_n = W_n + \theta W_{n-2}$ où (W_n) est un bruit blanc et θ un réel, tel que X_n soit de fonction d'autocovariance γ. On pose donc $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2 et θ un réel. On sait que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par $X_n = W_n + \theta W_{n-2}$ est stationnaire.
2) Quelle est sa fonction d'autocovariance γ_X ?
3) Peut-on trouver des couples (θ, σ^2) tels que $\gamma_X = \gamma$?

Exercice 18 Soit $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par : $\gamma(n) = Ka^{|n|}$.

1) A quelles conditions sur K et a est-ce que γ est une fonction d'autocovariance ? Quelle est la mesure spectrale ou la densité spectrale (si elle existe) associée ?

   On suppose ces conditions remplies et $|a| \neq 1$. D'après le cours, il existe un processus stationnaire centré gaussien $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ayant γ pour fonction d'autocovariance. Soit $W_n = X_n - aX_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
2) Montrer que W_n est indépendant de $(X_p, 0 < p < n)$.
3) Montrer que W_n est un bruit blanc gaussien.
4) Montrer que l'on peut écrire dans L^2, $X_n = \sum_{j\geq 0} a^j W_{n-j}$.
5) Donner deux méthodes différentes pour calculer la fonction d'autocovariance γ_X.

Exercice 19 *Processus à spectre fini : cas particulier*
Soit A une variable aléatoire complexe centrée, de carré intégrable, de variance $\mathbb{E}[|A|^2] = \sigma^2$. Soit $\lambda_0 \in]-\pi, \pi]$. On pose $X_n = A\mathrm{e}^{in\lambda_0}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

1) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire au sens large. Quelle est sa mesure spectrale ? Donner une relation linéaire liant les X_n et en déduire une relation entre les covariances.

2) Réciproquement, soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire centré de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{C}$ et qui vérifie $X_n - aX_{n-1} = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$, où $a \in \mathbb{C}^*$. Que vaut nécessairement $|a|$? Existe-t-il une variable aléatoire complexe centrée de carré intégrable A et une constante $\lambda_0 \in]-\pi, \pi]$ tels que $X_n = A\mathrm{e}^{in\lambda_0}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 20 *Généralisation*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un processus centré de carré intégrable, stationnaire au sens large, à valeurs complexes, de fonction de covariance γ et de mesure spectrale μ_X. On va chercher à montrer que les trois affirmations suivantes sont équivalentes :
(a) Le support de μ_X est fini.
(b) Il existe une relation linéaire entre les (X_n) c'est à dire qu'il existe $(a_k)_{k=0,\dots,p}$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, \sum_{k=0}^{p} a_k X_{n-k} = 0$.
(c) Il existe des variables aléatoires complexes $(A_1, ..., A_p)$ centrées, de carré intégrable, et orthogonales deux à deux, et il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in]-\pi, \pi]^p$ distincts, tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $X_n = \sum_{k=1}^{p} A_k \mathrm{e}^{in\lambda_k}$ (presque sûrement).

1) Montrer que (c) implique (a).

   Les questions suivantes ont pour but de montrer (a) équivaut à (b).

2) Montrer l'équivalence suivante : Si $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire centré de fonction de covariance ρ, alors (i) est équivalent à (ii).
   (i) il existe une relation linéaire entre les Y_n : $\forall n \in \mathbb{Z}, \sum_{k=0}^{p} a_k\ Y_{n-k} = 0$ (presque sûrement).
   (ii) il existe une relation linéaire entre les $\rho(n)$: $\forall n \in \mathbb{Z}, \sum_{k=0}^{p} b_k\ \rho(n-k) = 0$.

3) Montrer que si le support de μ_X est fini, il existe une relation linéaire entre les $\gamma(n)$.

4) Montrer que s'il existe une relation linéaire entre les $\gamma(n)$ alors le support de μ_X est fini.

   Remarque : On ne montrera pas que (a) implique (c).

3 Vecteurs gaussiens

Exercice 21 Soit le vecteur aléatoire $U = (X, Y, Z)^t$ de loi normale $\mathcal{N}(m, D)$ et tel que

$$\begin{gathered} \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z] = 0, \\ \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Z^2] = 1, \\ \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[XZ] = 1/2. \end{gathered}$$

1) Écrire la densité f_U de U.
2) Écrire la fonction caractéristique ϕ_U de U.

Exercice 22 Soit le vecteur aléatoire gaussien $(X_1, X_2, X_3)^t$, et soit $a \in \mathbb{R}$. Les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont supposées telles que
– pour $i = 1, 2, 3$, X_i suit la loi $\mathcal{N}(i, i^2)$
– pour $j \neq k$, $\mathbb{C}\text{ov}[X_j, X_k] = ajk$.

1) Donner la matrice de covariance de $(X_1, X_2, X_3)^t$.
2) Quel est l'ensemble des valeurs possibles du réel a ?
3) Donner la densité marginale du couple (X_1, X_2).

Exercice 23 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On définit $Y = (X, \epsilon X)^t$ où ϵ est une variable aléatoire indépendante de X telle que : $\mathbb{P}(\epsilon = 1) = 1 - \mathbb{P}(\epsilon = -1) = 1/2$.

1) Calculer $\mathbb{C}\text{ov}[X, \epsilon X]$.
2) Les v.a. X et ϵX sont-elles indépendantes ?
3) On suppose $m = 0$. Quelle est la loi de ϵX ? le vecteur Y est-il gaussien ?

Exercice 24 On considère $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)) - \lambda(x)\lambda(y)$, pour x, $y \in \mathbb{R}$.

1) À quelles conditions f est-elle une densité de probabilité ?
2) Soit (X, Y) un couple de v.a. de densité f.
   (a) Donner la loi de X et la loi de Y. Que valent $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$?
   (b) À quelle condition a-t-on $\mathbb{C}\text{ov}[X, Y] = 0$?
   (c) Montrer qu'il existe des fonctions λ vérifiant les conditions précédentes.
   (d) Quel est l'intérêt de cet exercice ?

Exercice 25 Soit $(T, X)^t$ un vecteur aléatoire suivant une loi normale tel que : $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X] = 1$, $\mathbb{C}\text{ov}[X, T] = -1$ et $\mathbb{V}\text{ar}[T] = 2, \mathbb{V}\text{ar}[X] = 5$

1) Donner la loi conditionnelle de X sachant $T = t$.
2) En déduire $\mathbb{E}[X|T = t]$.

Exercice 26 Soit $(X_1, X_2, X_3)^t$ un vecteur gaussien tel que la variable aléatoire X_1 est centrée et a pour variance $4/3$, et de plus, pour $n = 1, 2$, si $X_n = x$ alors X_{n+1} suit une loi $\mathcal{N}(\frac{x}{2}, 1)$.

1) Quelles sont les lois de (X_1, X_2) et X_2 ? En déduire la loi marginale de X_3.
2) Quelles sont les lois de (X_1, X_2, X_3) et (X_1, X_3) ? Que peut-on dire du coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_3 ?

Exercice 27 Soit le vecteur gaussien $(X, Y)^t$ tel que la variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, et tel que la loi conditionnelle de $Y|X = x$ est une loi normale $\mathcal{N}(x, 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Quelle est la loi marginale de Y ?
2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Exercice 28 Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ d'espérace $(1, 2, 1)^t$ et de matrice de variance

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Que vaut $\mathbb{E}[X_3|X_1, X_2]$?
2) Donner la loi conditionnelle de X_3 sachant que $X_1 = x_1$ et $X_2 = x_2$.

4 Autocorrélation partielle, prédiction

Exercice 29 Soit $Y = X^2 + Z$ où X et Z sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Quel est le meilleur prédicteur de Y sachant X ? Quelle est l'erreur de prévision ?
2) Quel est le meilleur prédicteur linéaire de Y sachant X ? Quelle est l'erreur de prévision ?

Exercice 30 Soient $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires centrées, orthogonales. Soit θ un réel non nul, on définit alors $X_1 = \epsilon_1$, $X_2 = \theta X_1 + \epsilon_2, \ldots,$ $X_n = \theta X_{n-1} + \epsilon_n$. Trouver le meilleur prédicteur linéaire $\hat{X}_{n+1}$ de X_{n+1} connaissant $X_1, ..., X_n$.

Exercice 31 Soit $k \geq 1$ un entier, et soient $X_1, ..., X_k$ des variables aléatoires centrées, de carré intégrable, de matrice de variance-covariance Γ_X inversible. Soit Y une variable aléatoire centrée.

1) Montrer que le meilleur prédicteur linéaire de Y sachant $X_1, ..., X_k$ est $\hat{Y} = {}^t aX$ où $a = \Gamma_X^{-1} b$ et $b = {}^t[\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, X_1), \ldots, \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, X_k)]$.
2) Montrer que l'erreur de prévision est $\mathbb{E}\big[|Y - \hat{Y}|^2\big] = \mathbb{E}\big[|Y|^2\big] - {}^t b\ \Gamma_X^{-1}\ b$.
3) On suppose maintenant que les variables $X_1, ..., X_k$ sont orthogonales. Montrer l'inégalité
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathbb{C}\mathrm{ov}[Y, X_i])^2}{\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_i]} \leq \mathbb{E}[Y^2].$$

Exercice 32 Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire centré de fonction de covariance γ_X. On suppose que pour tout n, la matrice de variance-covariance Γ_n de $(X_1, ..., X_n)$ est inversible. On appelle $\hat{X}_{n+1,k}$ le meilleur prédicteur linéaire de X_{n+1} sachant $X_n, X_{n-1}, ..., X_{n-k+1}$.

1) Montrer que $\hat{X}_{n+1,k} = {}^t aX$ où $a = \Gamma_k^{-1} b_k$, $b_k = {}^t(\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k))$ et $X = {}^t(X_n, \ldots, X_{n-k+1})$.
2) Montrer que l'erreur de prévision est
$$\sigma_k^2 = \mathbb{E}\big[|X_{n+1} - \hat{X}_{n+1,k}|^2\big] = \frac{\det(\Gamma_{k+1})}{\det(\Gamma_k)}.$$

Exercice 33 Soit ρ un réel tel que $0 < |\rho| < 1/2$, et soit $\gamma_X : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ la fonction d'autocovariance définie par
$$\gamma_X(0) = 1,\ \gamma_X(1) = \gamma_X(-1) = \rho,\ \gamma_X(k) = 0 \text{ si } |k| > 1.$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un processus du second ordre, stationnaire, centré, de fonction d'autocovariance γ_X. On note $H^X_{n-1,k}$ le passé limité à l'instant $n-1$ (c'est à dire le sous-espace vectoriel engendré par $(X_{n-1}, \ldots, X_{n-k})$) et $\hat{X}_{n,k}$ le meilleur prédicteur linéaire de X_n sachant $(X_{n-1}, \ldots, X_{n-k})$.

1) Calculer $\hat{X}_{n,3}$ et $\hat{X}_{n,4}$ ainsi que les erreurs de prédiction σ_3^2 et σ_4^2.
2) Calculer $\hat{X}_{n,3}$ par l'algorithme de Durbin-Levinson ci-dessous.
3) Montrer que $u_k = \det(\Gamma_k)$ vérifie la relation de récurrence : $\forall k \geq 2$, $u_k - u_{k-1} + \rho^2 u_{k-2} = 0$. En déduire la valeur de $\det(\Gamma_k)$ et celle de $\lim_{k\to+\infty} \sigma_k^2$ en fonction des solutions λ_1 et λ_2 de l'équation $\lambda^2 - \lambda + \rho^2 = 0$. On notera λ_2 la plus grande.
4) Que vaut l'autocorrélation partielle entre X_n et X_{n-2} ?

Algorithme de Durbin-Levinson :
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire. Pour p un entier non nul, on note $\hat{X}_{n,p}$ le meilleur prédicteur linéaire au sens des moindres carrés de X_n sachant $(X_{n-1}, X_{n-2}, ..., X_{n-p})$, il s'écrit :

$$\hat{X}_{n,p} \;=\; \phi_{p,1} X_{n-1} \;+\; \phi_{p,2} X_{n-2} \;+\; ... + \phi_{p,p} X_{n-p}$$

pour des réels $\phi_{p,1}, \ldots, \phi_{p,p}$ qu'on cherche à déterminer. Soit σ_p^2 l'erreur de prédiction commise : $\sigma_p^2 \; = \mathbb{E}\big[(X_n - \hat{X}_{n,p})^2\big]$. La fonction d'autocovariance de X est notée γ.
Alors selon l'algorithme de Durbin-Levinson, les coefficients $\phi_{p,j}$ et les erreurs σ_p^2 sont donnés par les équations de récurrence suivantes :

$$\phi_{p,p} \;=\; \frac{\gamma(p) - \sum_{j=1}^{p-1} \phi_{p-1,j} \; \gamma(p-j)}{\sigma_{p-1}^2} \qquad \text{(fonction d'auto-corrélation partielle)}$$

$$\phi_{p,j} \;=\; \phi_{p-1,j} \;-\; \phi_{p,p} \; \phi_{p-1,p-j}, \quad j = 1, ..., p-1$$

$$\sigma_p^2 \;=\; \sigma_{p-1}^2 \; (1 - \; \phi_{p,p}^2)$$

avec les conditions initiales

$$\phi_{1,1} \;=\; \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}, \;\; \sigma_0^2 \; = \gamma(0).$$

On note ci-dessous H_n^X le sous-espace vectoriel de L^2 engendré par les $(X_k, k \leq n)$.

Exercice 34 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire centré orthogonal et soit $Y \in L^2$ une variable aléatoire centrée. Montrer que le projeté orthogonal de Y sur H_n^X, noté $P_{H_n^X}(Y)$ est égal à

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbb{C}\text{ov}[Y, X_{n-i}]}{\mathbb{V}\text{ar}[X_{n-i}]} X_{n-i}$$

Exercice 35 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire centré. Montrer que le processus innovation

$$W_{n+1} = X_{n+1} - P_{H_n^X}(X_{n+1})$$

est un bruit blanc et que $\forall n, H_n^W \subset H_n^X$.

Exercice 36 On se place dans le cadre de l'exercice 33.

1) Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2 et $|\theta| < 1$. Existe-t-il un couple (θ, σ^2) tel que le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par $Y_n = W_n - \theta W_{n-1}$ ait pour fonction d'autocovariance γ_X ?
2) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$, $H^Y_{n,p} \subset H^W_{n,p+1}$ et $H^Y_n \subset H^W_n$.
3) Montrer que la série de terme général $(\theta^k Y_{n-k})_{k\geq 0}$ converge dans L^2 vers W_n. En déduire que $H^W_n \subset H^Y_n$ et que les projections sur H^W_n et H^Y_n sont identiques.
4) Calculer $P_{H^Y_{n-1}}(Y_n)$ en fonction de $(W_p)_{p<n}$ puis de $(Y_p)_{p<n}$. Quelle est l'erreur de prédiction ? Retrouve-t-on les résultats de la troisième question de l'exercice 33 ?

5 Processus AR, MA, ARMA

Exercice 37 Soit $\rho \in \mathbb{R}^*$, et considérons $X_t - \rho X_{t-1} = \epsilon_t$ où $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2.

1) Montrer que si $|\rho| = 1$, il n 'existe pas de processus stationnaire X satisfaisant cette équation.
2) On se place dans le cas $|\rho| \neq 1$.
   (a) *On suppose* $|\rho| < 1$. Ecrire X sous forme de moyenne mobile. Le processus X est-il causal ?
   (b) *On suppose* $|\rho| > 1$. Ecrire X sous forme de moyenne mobile. Donner sa représentation canonique en fonction du bruit blanc $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Donner la variance de η_t.
3) Dans le cas $|\rho| < 1$, calculer $\gamma_X(0)$ et la fonction d'autocorrélation $\rho_X(h)$ en fonction de $\rho_X(l)$, $l < h$.

Exercice 38 *Proccessus AR(2).* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire, qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$X_n = -\frac{7}{3}X_{n-1} - \frac{2}{3}X_{n-2} + \epsilon_n.$$

1) Ecrire X sous forme moyenne mobile infinie.
2) Donner sa représentation canonique. Ecrire X sous forme moyenne mobile en fonction du bruit blanc défini dans la représentation canonique. Donner la variance de l'innovation.
3) Calculer $\hat{X}_{n+1}$ et $\hat{X}_{n+2}$ ainsi que les erreurs de prédiction.

Exercice 39 *Processus MA(1).* Soit $X_n = W_n - aW_{n-1}$ où a est un réel non nul et W un bruit blanc. Discuter suivant la valeur de a de l'écriture de W en fonction de X. Que peut-on conclure pour les passés de X et de W ?

Exercice 40 *Processus MA(q).* Soient $q \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_0, \ldots, \alpha_q$ des réels avec $\alpha_q \neq 0$. Posons $X_t = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}$ où $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc.

1) Calculer la fonction d'autocovariance de X.
2) Donner cette fonction dans les cas suivants :
   (a) $X_t = \sum_{i=0}^{4} \epsilon_{t-i}$
   (b) $X_t = \epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1}$. Calculer $\mathbb{C}\mathrm{orr}[X_t, X_{t-1}]$; quelles sont ses valeurs possibles ?

Exercice 41 *Processus MA(∞).* Soit $(\alpha_j)_{j\geq 0}$ une suite réelle telle que $\sum_j \alpha_j^2 < +\infty$, et soit $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \epsilon_{t-j}$ où $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc. Calculer la fonction d'autocovariance de X.

Exercice 42 On se donne deux polynômes P et Q, on suppose que P n'a pas de racines de module 1, et on suppose de plus que P et Q sont factorisables par un même polynôme R, c'est-'a-dire qu'il existe deux polynômes P_1 et Q_1 tels que $P = P_1R$ et $Q = Q_1R$. On note B l'opérateur retard et on se donne un bruit blanc W et un processus stationnaire X. Montrer que $P(B)X = Q(B)W$ si et seulement si $P_1(B)X = Q_1(B)W$.

Exercice 43 Soit X un processus ARMA(1,1) : $X_t - \theta X_{t-1} = \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}$ avec $|\theta| < 1$ et $|b| < 1$. Calculer l'autocovariance de X par les deux méthodes suivantes :

1) On écrit X sur ϵ et on calcule $\gamma_X(h)$.
2) On multiplie l'équation ARMA par X_{t-k}.

Exercice 44 Reprendre l'exercice précédent avec l'équation $X_t - 0,8X_{t-1} = \epsilon_t + 0,7\epsilon_{t-1} + 0,6\epsilon_{t-2}$ où ϵ_t est un bruit blanc de variance 1.

Exercice 45 Soit X un processus stationnaire solution d'une équation ARMA(1,1), et dont la densité spectrale par rapport à par rapport à $\frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi}$ est

$$f(\lambda) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \frac{|1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1}\mathrm{e}^{-i\lambda}|^2}{|1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-i\lambda}|^2}.$$

Écrire les 4 équations ARMA possibles. Dire si elles sont causales et inversibles.

Exercice 46 Soit X un processus stationnaire, de densité spectrale

$$f(\lambda) = \frac{1}{18} \frac{|1 + 4\ \mathrm{e}^{-i\lambda}|^2}{|1 + \frac{5}{6}\ \mathrm{e}^{-i\lambda} + \frac{1}{6}\ \mathrm{e}^{-2i\lambda}|^2}$$

par rapport à $\frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi}$. On admet que X est un processus ARMA.

1) Quelle est la relation ARMA canonique ? Quelle est la variance de l'innovation U ?
2) Ecrire le développement de U en fonction de X.
3) Calculer $\hat{X}_{n+1}, \hat{X}_{n+2}$ et les erreurs de prédiction.
4) Donner un intervalle de confiance à 95% pour X_{n+2} en supposant que X est gaussien (on donne $\hat{X}_{n+1} = 10, X_n = 12$).

Exercice 47 Parmi les processus ARMA suivants, trouver lesquels sont causaux et / ou inversibles. On note (ε_t) un bruit blanc centré réduit et (X_t) un processus du second ordre tel que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

1) $X_t - \frac{1}{2}X_{t-1} = \varepsilon_t + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}$;
2) $X_t + 1,9X_{t-1} + 0,88X_{t-2} = \varepsilon_t + 0,2\varepsilon_{t-1} + 0,7\varepsilon_{t-2}$;
3) $X_t + 1,6X_{t-1} = \varepsilon_t - 0,4\varepsilon_{t-1} + 0,04\varepsilon_{t-2}$.

Pour ceux qui sont causaux, calculer les fonctions d'autocovariance. Pour ceux qui sont causaux et / ou inversibles, calculer les coefficients ψ_j et / ou π_j pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$ des représentations $X = \psi(B)\varepsilon$ ou $\varepsilon = \pi(B)X$.

Exercice 48 Soit (ε_t) un bruit blanc centré réduit et (X_t) un processus du second ordre.

1) Trouver les coefficients (ψ_j) de la représentation $X = \psi(B)\varepsilon$ pour le processus ARMA$(2, 1)$ tel que

$$(I - 0,5B + 0,04B^2)X = (1 + 0,25B)\varepsilon.$$

Donner les valeurs pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

2) Calculer la fonction d'auto-covariance γ du processus AR(3)

$$(I - 0,5B)(I - 0,4B)(I - 0,1B)X = \varepsilon.$$

Donner les valeurs de $\gamma(h)$ pour $h = 0, 1, 2, 3, 4$.

3) Calculer les fonctions moyenne et d'auto-covariance du processus ARMA(2,1) tel que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X = 2 + 1,3X_{t-1} - 0,4X_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}.$$

Est-il causal et inversible ?