Université de Paris X Nanterre — Année 2006-2007
Licence MMIA première année

# Suites et séries

*Exercice* 1. Déterminer les nombres réels $r$ tels que la suite $u_n = r^n$ vérifie la relation de récurrence $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

*Exercice* 2. Etudier en fonction des réels $a$ et $b$ la convergence et l'existence de suites extraites convergentes des suites $u_n = a/n + b\sin(2n\pi/3)$ et $v_n = \sin(2n\pi/3)/n$.

*Exercice* 3. Soit $c > 0$ et soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ les suites définies de la façon suivantes :

$$a_0 > c, \quad a_n = (a_{n-1} + c/a_{n-1})/2 \ (n \geq 1) \ , \quad b_n = c/a_n \ .$$

(i) Montrer que ces deux suites sont bien définies, que $a_n$ est décroissante, $b_n$ est croissante, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.

(ii) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n - b_n \leq (a_{n-1} - b_{n-1})^2/4$..

(iii) En déduire que $a_n$ et $b_n$ convergent vers $\sqrt{c}$.

*Exercice* 4. Soit $\alpha$ un réel. Montrer que la série de terme général $n^{-1}(\log n)^{-\alpha}$ $(n \geq 2)$ est convergente si $\alpha > 1$ et divergente si $\alpha < 1$.

*Exercice* 5. Etudier la série de terme général $u_n = \arccos\sqrt{1 - 1/n^2}$.

*Exercice* 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série définie par $u_n = 4/(n^2 - 1)$ si $n$ est pair et $u_n = 1/(n^2 - 4)$ si $n$ est impair. Montrer que la série de terme général $u_n$ est convergente et calculer sa somme.

*Exercice* 7 (Inégalité de Hölder). Soient $p$ et $q$ des réels tels que $p^{-1}+q^{-1} = 1$. Soient $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ des suites de réels positifs telles que les séries de termes généraux $u_n^p$ et $v_n^q$ soient convergentes. Montrer que la série de terme général $u_n v_n$ est convergente et que l'on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^q\right)^{1/q} .$$

Application. Soit $\{u_n\}$ montrer que si la série de terme général $n^2 u_n^2$ est convergente, alors la série de terme général $u_n$ est convergente.

*Exercice* 8. Soit $\{u_n\}$ une suite de réels positifs. On pose $v_n = u_n/(1 + u_n)$.

(i) Si la suite $\{u_n\}$ est bornée, montrer qu'il existe des constantes strictement positives $a$ et $b$ telles que pour tout $n$, $au_n \leq v_n \leq bu_n$.

(ii) Si la suite $\{u_n\}$ n'est pas bornée, montrer que la suite $\{v_n\}$ ne tend pas vers 0.

(iii) Déduire de ce qui précède que les séries de termes généraux $u_n$ et $v_n$ sont de même nature.

(iv) Les séries de termes généraux $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ et $v_n = u_n/(1 + u_n)$ sont-elles de même nature ? Comparer avec la question précédente.