Université de Paris X Nanterre Année 2006-2007
Licence MMIA première année

Développements limités et applications.

Exercice 1. Développer à l'ordre 5 en 0 la fonction $\log(x+\sqrt{1+x^2})$.
Solution.

$$\log(x+\sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^5\epsilon(x) \ .$$

Exercice 2. Développer à l'ordre 2 en 0 la fonction $\log(x) - \log(1-e^{-x})$.
Solution.

$$\log(x) - \log(1-\mathrm{e}^x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{24} + x^2\epsilon(x) \ .$$

Exercice 3. Déterminer, si elle existe, la limite en 0 des fonctions suivantes :

$$\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin(x)} \ ; \quad \frac{\sin(x)-\arctan(x)}{x^3} \ ; \quad \frac{1}{\cosh(x)-1} - \frac{2}{\sinh^2(x)} \ ;$$
$$\frac{1}{\sin^4(x)}\left(\sin(x/(1-x)) - \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) \ ; \quad (1+x)^{((1+x)^{1/x}-e)/x} \ .$$

Solutions : 1 ; 1/6 ; -1/3 ; -1/6 ; 1.

Exercice 4. Déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$\{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\}^{1/\log(x)} \ ; \quad e^{-\alpha x}\sinh(\sqrt{x^2+1}) \ ; \quad (\cosh(\sqrt{x+1}) - \cosh(\sqrt{x}))^{1/\sqrt{x}} \ ;$$
$$\left(\frac{\arctan(x+1)}{\arctan(x)}\right)^{x^2} \qquad (1+x)^{1+1/(1+x)} - x^{1+1/x} \ .$$

Solutions : 1 ; 0 si $\alpha > 1$, 1/2 si $\alpha = 1$, $+\infty$ si $\alpha < 1$; e ; $\mathrm{e}^{2/\pi}$; 1.

Exercice 5. Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan(x)$. En déduire un développement à l'ordre 7 de la fonction : $\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$.
Solutions.

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\epsilon(x) \ ,$$
$$\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x)) = -\frac{1}{30}x^7 + x^7\epsilon(x) \ .$$

Exercice 6. Déterminer α, β et γ tels que la fonction $\tan(x) - \frac{x+\alpha x^3}{1+\beta x^2+\gamma x^4}$ soit en 0 un infiniment petit d'ordre le plus haut possible.
Solution : $\alpha = -2/21$, $\beta = -3/7$, $\gamma = 1/105$.

Exercice 7. Développer à l'ordre 3 en 0 $\arccos(\sqrt{x/\tan(x)})$.
Solution.

$$\arccos(\sqrt{x/\tan(x)}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,x + \frac{4\sqrt{3}}{135}x^3 + x^3\epsilon(x)\ .$$

Exercice 8. Donner (avec un minimum de calcul) un développement limité à l'ordre 8 en 0 de la fonction $\tan^3(x)[\{\cos(x)\}^{x^2} - 1]$.
Solution.

$$\tan^3(x)[\{\cos(x)\}^{x^2} - 1] = -\frac{1}{2}x^7 + x^8\epsilon(x)\ .$$