Calcul Propositionnel

exercice 1 Exprimer les énoncés suivants au moyen de formules propositionnelles :

1. Alice et Barbara aiment la logique.
2. Alice et Barbara n'aiment pas la logique.
3. Alice aime la logique mais pas Barbara.
4. Alice ou Barbara, l'une des deux au moins, aime la logique.
5. Alice ou Barbara, l'une des deux exactement, aime la logique.
6. Bien qu'Alice aime la logique, Barbara, elle, ne l'aime pas.
7. Alice n'aime pas la logique et Barbara non plus.
8. Alice aime la logique, à moins que ce soit Barbara.

exercice 2 Exprimer les énoncés suivants au moyen de formules propositionnelles :

1. Si je travaille, je réussis.
2. Pour réussir, il suffit que je travaille.
3. Pour réussir, il faut que je travaille.
4. Pour réussir, il n'est pas nécessaire que je travaille.

exercice 3 Formaliser les énoncés suivants ainsi que leur négation :

1. Othello et Desdémone sont mariés.
2. Othello et Iago sont mariés mais pas Cassio.
3. Desdémone aime Othello mais pas Cassio.
4. Othello est jaloux et naïf.
5. La robe de Desdémone est blanche et bleue.
6. La robe de Desdémone est blanche ou bleue.

exercice 4 Vérifier, au moyen de tableaux de vérité, que les formules suivantes sont des tautologies :

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
2. $p \to (q \to p)$
3. $p \to (q \to (p \wedge q))$
4. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

exercice 5 Vérifier, au moyen de tableaux de vérité, que les conséquences logiques suivantes sont correctes :

1. $p \to q \quad \vdash \quad \neg q \to \neg p$
2. $p \wedge (q \vee r) \quad \vdash \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
3. $p \vee q, \neg p \quad \vdash \quad q$
4. $\neg(p \vee q), r \to q \quad \vdash \quad \neg(p \vee r)$

exercice 6 Montrer, à l'aide de valeurs de vérité bien choisies, que

1. $p \vee q \quad \nvdash \quad p \to q$
2. $p \to q \quad \nvdash \quad \neg p \to \neg q$
3. $p \to q, q \to r, r \to s, s \to t \quad \nvdash \quad t \to p$
4. $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \quad \nvdash \quad (p \wedge q) \vee (r \wedge s)$

exercice 7 Déterminer, parmi les raisonnements suivants, lesquels sont corrects. On précisera dans chaque cas les hypothèses et la conclusion.

1. Si j'ai la grippe, j'ai de la fièvre. Or, je n'ai pas la grippe, donc je n'ai pas de fièvre.
2. Si Pierre invite Marie, elle ne vient pas. Or Marie vient, donc Pierre ne l'a pas invitée.
3. Si Pierre ou Marie veulent garder la maison, nous allons nous promener. Or nous n'allons pas nous promener, donc Pierre ne veut pas garder la maison.
4. Si Pierre se présente, alors Jean démissionne. Si Jean démissionne, alors Albert se présente. Si Albert se présente, il sera élu. Si Albert est élu, Pierre n'est pas élu. Si Pierre ne se présente pas, il n'est pas élu. Donc Pierre n'est pas élu.
5. Si Romeo aime Juliette, elle l'épousera. Si Roméo n'aime pas Juliette, elle épousera Gaston. Or Juliette n'épouse pas Roméo : elle épousera donc Gaston.

exercice 8 Alice, Belle et Cendrillon ont un examen de logique à passer. On suppose que :

A : L'une des trois au moins révisera pour l'examen.
B : Si Alice ne révise pas, Belle non plus.
C : Si Alice révise, Cendrillon aussi

1. Formaliser les trois hypothèses ci-dessus en calcul propositionnel.
2. Donner la table de vérité des formules obtenues.
3. Peut-on dire qui révisera ? Qui ne révisera pas ?

exercice 9 Une fête a lieu et Agathe, Berthe et Cunégonde sont invitées. On suppose que :

A : Si Agathe vient, alors Cunégonde et Berthe viennent aussi.
B : Si Cunégonde ne vient pas, alors Agathe vient.
C : Si Agathe ne vient pas, alors Berthe vient.

1. Formaliser les trois hypothèses ci-dessus en calcul propositionnel.
2. Donner la table de vérité des formules obtenues.
3. Pouvez-vous déterminer qui, parmi ces trois jeunes filles, viendra certainement ? Qui ne viendra pas ?

exercice 10 Démontrer la conséquence logique suivante :

$$p, p \to q, (p \wedge q) \to r \quad \vdash \quad r$$

exercice 11 Montrer que $q \to r$ est conséquence logique de p et $q \to (p \to r)$. Indiquez avec précision les règles utilisées.

exercice 12 On considère la formule

$$A = ((p \vee (p \to q)) \to q$$

1. Démontrer la conclusion $p \to q$ à partir de l'hypothèse A.
2. Démontrer la conclusion $(p \to q) \to q$ à partir de l'hypothèse A.
3. Utiliser les résultats précédents pour démontrer la conclusion q à partir de l'hypothèse A.
4. Que peut-on dire de la formule $(((p \vee (p \to q)) \to q) \to q$?

exercice 13 Démontrer les tautologies suivantes :

1. $((p \vee q) \to r) \to (p \to r)$
2. $((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$

exercice 14 Une fête a lieu, et Pierre, Jean et Gilles sont invités. On suppose que :

> A : Si Pierre vient, alors Gilles et Jean viennent.
> B : Si Gilles ne vient pas, alors Pierre vient.
> C : Si Pierre ne vient pas, alors Jean vient.

Avec ces prémisses, déterminez qui parmi les trois vient certainement à la fête. Rédigez les démonstrations.

exercice 15 Perdican, Quasimodo et Roudoudou ont une amie nommée Mélusine à qui ils n'osent pas écrire pour se déclarer. Ils conviennent entre eux que :

> A : Si Perdican ne lui écrit pas, alors Quasimodo et Roudoudou lui écriront.
> B : Si Quasimodo lui écrit, alors ni Perdican, ni Roudoudou ne lui écrira.

Avec ces prémisses, déterminez qui écrit à Mélusine et qui ne lui écrit pas. Rédigez les démonstrations.

exercice 16 Elisabeth, Marie et Pierre préparent leurs vacances. Ils arrivent à la conclusion que :

> A : Si Marie part en Italie, Pierre restera à Paris.
> B : Si Pierre ne reste pas à Paris, Elisabeth ne viendra pas à Paris.
> C : Si Marie ne part pas en Italie, Elisabeth viendra à Paris.

Montrer que l'on peut inférer de ces prémisses que Pierre restera à Paris.

exercice 17 Le raisonnement suivant est-il correct ?

> « Si Pierre a lu *l'Iliade*, Quentin aussi. Si Pierre a lu *l'Odyssee*, Quentin aussi. On sait de plus qu'aucun de ces deux livres n'a été lu à la fois par Pierre et par Quentin, et qu'aucune de ces deux personnes n'a lu à la fois *l'Iliade* et *l'Odyssee*. Par conséquent, au moins l'un des deux livres n'a été lu ni par Pierre, ni par Quentin. »

exercice 18 Formaliser le raisonnement suivant, en explicitant les règles utilisées :

> « Si la fenêtre est ouverte, Pierre a trop froid, sauf s'il porte son pull. Si la fenêtre est fermée, il a trop chaud, sauf si la ventilation fonctionne. Or Pierre n'a pas trop chaud, ni trop froid, et la ventilation ne fonctionne pas. Donc, Pierre porte son pull. »

exercice 19

1. Montrer que $p \to (q \wedge r), \neg r \vdash \neg p$.
2. Montrer que $p \vee (q \to r), q, \neg r \vdash p$.

exercice 20 Démontrer la tautologie suivante, en précisant les règles utilisées :

$$((p \to q) \to p) \to p$$

exercice 21 Arthur, Babar, Céleste et Douste veulent s'inscrire à l'université. Ils décident que :

> A : Si Douste s'inscrit à Nanterre, ni Babar ni Céleste ne s'y inscriront.
>
> B : Si Douste ne s'inscrit pas à Nanterre, Arthur non plus.
>
> C : Si Arthur ou Babar s'inscrit à Nanterre, Céleste aussi.

En déduire qu'Arthur ne s'inscrira pas à Nanterre.

exercice 22 Deux suspects sont interrogés et font les déclarations suivantes :

Mr X : « Monsieur Y est coupable. »

Mr Y : « Si je suis coupable, alors Monsieur X l'est aussi. »

1. Montrer que l'une au moins des deux déclarations est vraie. Peut-on pour autant en déduire quelque chose sur la culpabilité des suspects ?
2. On suppose en outre que les innocents disent la vérité et les coupables mentent. Montrer qu'exactement l'un des deux est coupable. Peut-on savoir lequel ?

exercice 23 Pierre et Quentin sont accusés d'un crime. Ils font les déclarations suivantes :

Pierre : « Quentin est coupable. »

Quentin : « Nous sommes tous les deux innocents. »

1. On suppose que tous les deux ont menti : déterminer qui est coupable et qui ne l'est pas.
2. On suppose maintenant que les coupables mentent et que les innocents disent la vérité : déterminer qui est coupable et qui ne l'est pas.

exercice 24 Albert ment toujours et Bernard dit toujours la vérité. Pour chacune des déclarations suivantes, dites s'il est possible de l'attribuer à Albert seulement, à Bernard seulement, aux deux, ou à aucun des deux.

1. « Bernard a dit qu'il s'appelle Albert »
2. « Je m'appelle Bernard »
3. « Je m'appelle Albert »

exercice 25 Dans les formules suivantes, dire quelles sont les occurrences libres et les occurrences liées :

1. $\forall x\ (P(x) \to Q(x,y))$
2. $\forall x\ P(x) \to Q(x,y)$
3. $\forall x\ \exists y\ (P(x) \to Q(x,y))$
4. $\forall x\ Q(x,y) \land \exists y\ Q(x,y)$

exercice 26 Formaliser les énoncés suivants avec des lettres de prédicat et des constantes bien choisies :

1. Jean connaît Marie.
2. Tout le monde connaît Marie.
3. Personne ne connaît tout le monde.
4. Jean connaît tous ceux qui connaissent Marie.
5. Marie connaît quelqu'un qui connaît tout le monde.

exercice 27 On considère le langage du calcul des prédicats formé par deux lettres de prédicat binaire A et T et une constante a. On interprète $A(x,y)$ par « x est ami de y », $T(x,y)$ par « x a téléphoné à y » et la constante a par « Alice », le domaine étant un ensemble de personnes.

Quelle est la signification en français des formules suivantes ?

1. $\forall x\ (A(x,a) \to T(a,x))$
2. $\forall x\ \exists y\ (A(y,x) \land T(x,y))$
3. $\neg\exists x\ \forall y\ (A(y,a) \to T(x,y))$
4. $\forall x\ \forall y\ (T(x,y) \to A(x,y))$

exercice 28 Formaliser les phrases suivantes en introduisant des prédicats convenables :

1. Pierre a cassé un jouet.
2. Tous les enfants ont cassé un jouet.
3. Certains enfants n'ont pas cassé de jouet.
4. Les enfants qui ont cassé un jouet ont cassé tous les jouets.

exercice 29 On considère sur le domaine D des personnes présentes à un bal les prédicats :

$F(x)$: x est une fille
$G(x)$: x est un garçon
$D(x, y)$: x et y ont dansé ensemble

Interpréter les formules suivantes :

1. $\exists x\ \exists y\ (G(x) \land G(y) \land D(x, y))$
2. $\forall x\ (G(x) \to \exists y\ (F(y) \land D(x, y)))$
3. $\forall x\ (G(x) \to \exists y\ (F(y) \land \neg D(x, y)))$
4. $\forall x\ (G(x) \to \neg \exists y\ (F(y) \land D(x, y)))$
5. $\neg \forall x\ (G(x) \to \exists y\ (F(y) \land D(x, y)))$
6. $\exists x\ (G(x) \land \forall y\ (F(y) \to D(x, y)))$

exercice 30 Considérons une femme Marie et un homme Pierre représentés par les constantes m et p, ainsi que les prédicats suivants :

$M(x, y)$: x est la mère de y.
$P(x, y)$: x est le père de y.
$E(x, y)$: x et y sont mariés.

1. Que disent les formules suivantes à propos de Pierre et Marie ?
   (a) $\exists z\ (M(m, z) \land P(z, p))$
   (b) $\forall x\ (M(m, x) \to P(p, x))$
   (c) $\forall x\ (M(m, x) \to \exists y\ (E(x, y)))$
2. Exprimer par une formule ces différents liens de parenté entre Marie et Pierre [on pourra utiliser des abréviations] :
   (a) Pierre est le grand-père de Marie.
   (b) Marie est la belle-sœur de Pierre.
   (c) Marie est la demi-sœur de Pierre.
   (d) Pierre est le neveu de Marie.
   (e) Pierre est l'oncle de Marie.
   (f) Marie et Pierre sont cousins germains.
3. Exprimer par une formule les situations suivantes :
   (a) Pierre est marié.
   (b) Pierre n'a pas de frère et sœur.
   (c) Marie n'a pas d'enfants.
   (d) Pierre est marié à l'une de ses cousines.

exercice 31 Reconnaître parmi les énoncés suivants les mots ou les groupes de mots qui pourraient être associés à des constantes, des variables ou des prédicats. Formaliser ensuite ce que disent ces énoncés.

1. Les soldats, fatigués, se sont arrêtes.
2. Les soldats fatigués se sont arrêtes.
3. Les gens qui travaillent réussissent.
4. Un chien aboie.
5. Pierre veut une glace.
6. Les Romains ont battu les Carthaginois.
7. Pierre aime sa femme et Jean aussi.

exercice 32 On considère le langage constitué de deux lettres de prédicats : F à un argument, et C à deux arguments, ainsi que de trois constantes a, b et c. On considère l'interprétation suivante : le domaine est

$$\mathcal{D} = \{\text{Alain}, \text{Bernard}, \text{Charles}\}$$

a, b, et c désignent Alain, Bernard et Charles respectivement. $F(x)$ est interprété par « x est fort », $C(x, y)$ par « x croit que y est fort ». De plus Alain est fort, mais pas Bernard ni Charles ; enfin tous les trois croient que Bernard est fort, et seul à l'être.

1. Vérifier que les éléments précédents déterminent bien une unique interprétation. Représenter graphiquement la relation binaire.
2. Evaluer les formules suivantes :
   (a) $C(x, x)$
   (b) $F(x) \wedge C(x, x)$
   (c) $C(x, x) \rightarrow \neg F(x)$
   (d) $\neg F(x) \rightarrow C(x, x)$
   (e) $C(x, y) \wedge C(y, x)$
   (f) $F(x) \wedge C(x, y)$
   (g) $\neg F(x) \wedge C(x, y) \wedge C(y, z)$

exercice 33 On considère le langage constitué d'une lettre de prédicat unaire M, d'une lettre de prédicat binaire V et de quatre constantes a, b, c et d. On définit comme suit un interprétation de ce langage : le domaine est $\mathcal{D} = \{\text{Alice}, \text{Barbara}, \text{Charles}, \text{Daniel}\}$, les constantes a, b, c et d représentent respectivement Alice, Barbara Charles et Daniel. On interprète $M(x)$ par « x est malade » et $V(x, y)$ par « x a rendu visite à y ». On suppose que Barbara et Charles sont malades, et eux seuls, qu'Alice a rendu visite à Barbara, que Daniel a rendu visite à Alice et à Charles, et que ce sont les seules visites.

1. Représenter graphiquement cette interprétation.
2. Évaluer les phrases suivantes :
   (a) Tous les malades ont reçu de la visite.
   (b) Quelqu'un a rendu visite à tous les malades.
   (c) Les malades n'ont rendu visite à personne.
3. Évaluer dans cette interprétation les formules suivantes :
   (a) $\forall x\ (M(x) \to V(a,x))$
   (b) $\exists x\ (M(x) \land \neg V(a,x))$
   (c) $\forall x\ \exists y\ (M(x) \to V(y,x))$
   (d) $\forall x\ (\exists y\ V(x,y) \to \exists z\ V(z,x))$

exercice 34 Soient A une lettre de prédicat unaire et a une constante. Parmi les formules suivantes, deux ne sont pas valides, lesquelles ? Justifier soigneusement la réponse.

1. $\forall x\ A(x) \to A(a)$
2. $\forall x\ (A(x) \to A(a))$
3. $\exists x\ A(x) \to A(a)$
4. $\exists x\ (A(x) \to A(a))$

exercice 35 Soit P un prédicat binaire.

1. Montrer que les formules suivantes sont valides :
   (a) $\exists x\ P(x,x) \to \exists y\ \exists z\ P(y,z)$
   (b) $\forall x\ \forall y\ P(x,y) \to \forall z\ P(z,z)$
   (c) $\exists x\ \forall y\ P(x,y) \to \forall y\ \exists x\ P(x,y)$
2. Montrer que les formules suivantes ne sont pas valides :
   (a) $\forall x\ P(x,x) \to \forall y\ \forall z\ P(y,z)$
   (b) $\exists x\ \exists y\ P(x,y) \to \exists z\ P(z,z)$
   (c) $\forall y\ \exists x\ P(x,y) \to \exists x\ \forall y\ P(x,y)$

exercice 36 Montrer que les couples de formules suivants ne sont pas des couples de formules synonymes :

1. $A = \forall x\ \forall y\ (P(x) \lor Q(y))$, $B = \forall x\ (P(x) \lor Q(x))$
2. $A = \forall x\ \forall y\ (R(x,y) \to R(y,x))$, $B = \forall x\ \forall y\ R(x,y) \to \forall x\ \forall y\ R(y,x)$
3. $A = \exists x\ \forall y\ R(x,y)$, $B = \exists y\ \forall x\ R(x,y)$
4. $A = \exists x\ \forall y\ R(x,y)$, $B = \forall y\ \exists x\ R(x,y)$

exercice 37 La formule suivante est elle valide ?

$$\exists x\ (P(x) \to \forall y\ P(y))$$

[Indication : distinguer deux cas suivant que le domaine contient ou non un élément qui ne satisfait pas P.]

exercice 38 Dégager les prémisses et la conclusion du raisonnement suivant :

> « Tous ceux qui n'ont pas travaillé ont été punis. Or Albert n'a pas été puni, donc il a travaillé. »

Donner une démonstration formelle.

exercice 39 Démontrer formellement la correction du raisonnement suivant :

> « La personne qui est à l'origine de cette rumeur est à la fois bête et méchante. Or Jean est intelligent et Pierre est gentil. Donc aucun des deux ne peut en être responsable. »

exercice 40 Formaliser les énoncés suivants en calcul des prédicats :

A : Tous ceux qui ont écrit une lettre à une personne en ont reçue une de celle-ci.
B : Albert a écrit à tout le monde.
C : Tout le monde a écrit à Albert.

Montrer que C est conséquence de A et B.

exercice 41 Formaliser les énoncés suivants en calcul des prédicats :

A : Tout le monde connait quelqu'un qui connait un initié.
B : Albert n'est pas initié.
C : Il y a un non-initié qui connait un initié.

Montrer que C est conséquence de A et B.

exercice 42 Démontrer que des hypothèses

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((A(x,y) \land A(y,z)) \to A(x,z))$
$\forall x\ \forall y\ (A(x,y) \to A(y,x))$
$\forall x\ \exists y\ A(x,y)$

on peut tirer la conclusion : $\forall x\ A(x,x)$.

exercice 43 On considère un groupe de lecteurs d'une bibliothèque, groupe auquel appartient Pierre. Etudier la correction du raisonnement suivant :

> « Pierre a lu tous les livres de la bibliothèque qu'au moins l'un des membres du groupe a lu, et pour chacun des livres de la bibliothèque, il y a au moins un membre du groupe qui ne l'a pas lu. Donc au moins l'un des livres n'a été lu par personne. »

exercice 44 Étudier la correction du raisonnement suivant :

> « Chaque enfant voulait un jouet. Si deux enfants se sont disputés, c'est qu'ils voulaient le même jouet. Or chaque enfant s'est disputé avec tous les autres. Donc tous les enfants voulaient le même jouet. »

exercice 45 On suppose que :

A : Tous les clients ont choisi au moins un fromage ou un dessert.

B : Tous ceux qui ont choisi un dessert ont pris un café.

C : Ceux qui ont pris un café n'ont pas tous pris un dessert.

Peut-on en conclure que certains ont pris un dessert ? un fromage ?

exercice 46 Discuter la correction du raisonnement suivant :

> « Chaque barbier du village rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes et eux seulement. Donc il n'y a pas de barbier au village. »