Université Paris 10 Année 2012-2013

M1 ISIFAR - Séries chronologiques

Corrigé de l'examen de mi-semestre

Exercice 1 1. La matrice Γ est inversible (son déterminant vaut 1), donc le vecteur admet bien une densité. On calcule $\Gamma^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, si bien que $(x-1, y)^t\Gamma^{-1}(x-1, y) = (x-1)^2 + 2y^2 - 2(x-1)y$, et la densité de $(X, Y)^t$ est donnée par

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1)\Big)$$

pour x, $y \in \mathbb{R}$.

2. On peut faire le changement de variable $(u, v) = (x - y, x + y)$ dans la densité, attention dans les calculs, notamment au déterminant de la matrice jacobienne.

   Il est bien plus simple de voir que $(X - Y, X + Y)^t$ est une transformation linéaire du vecteur gaussien $(X, Y)^t$, si bien que c'est aussi un vecteur gaussien dont il suffit de calculer l'espérance et la matrice de variance pour caractériser la loi. On a $\mathbb{E}\big[X - Y\big] = \mathbb{E}\big[X\big] - \mathbb{E}\big[Y\big] = 1$, $\mathbb{E}\big[X + Y\big] = \mathbb{E}\big[X\big] + \mathbb{E}\big[Y\big] = 1$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X - Y] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] - 2\,\mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y] = 1$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X + Y] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] + 2\,\mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y] = 5$, et $\mathbb{C}\mathrm{ov}[X - Y, X + Y] = \mathbb{C}\mathrm{ov}[X, X] + \mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y] - \mathbb{C}\mathrm{ov}[Y, X] + \mathbb{C}\mathrm{ov}[Y, Y] = 1$. Par conséquent, $(X - Y, X + Y)^t$ suit une loi $\mathcal{N}\big((1, 1)^t, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)\big)$.

3. On sait déjà que $\mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y] \neq 0$, donc X et Y ne sont pas indépendantes, de même pour $X - Y$ et $X + Y$. Il reste à examiner l'indépendance éventuelle de X et $X - Y$, X et $X + Y$, Y et $X - Y$, Y et $X + Y$. À chaque fois le raisonnement est le même : quand on prend deux de ces variables, elles forment un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^2$ (transformation linéaire du vecteur gaussien $(X, Y)^t$), donc les variables sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle. Lorsqu'on calcule les quatre covariances, on trouve que seule $\mathbb{C}\mathrm{ov}[Y, X - Y]$ vaut zéro, les autres sont non nulles. Donc le seul couple indépendant est celui formé par Y et $X - Y$.

4. On sait déjà que Y et $X - Y$ sont indépendantes, donc $\mathbb{E}\big[Y|X - Y\big] = \mathbb{E}\big[Y\big] = 0$.

   Il faut calculer $\mathbb{E}\big[X|X - Y\big]$. Comme à la question 2, on peut passer par les densités, mais ce n'est pas le plus simple, cela nécessite en effet d'obtenir la densité jointe de $(X, X - Y)^t$ qu'on n'a pas encore calculée, et d'essayer de reconnaître dans le quotient de cette densité jointe divisée par la densité marginale de $X - Y$ une densité gaussienne dont l'espérance donnera $\mathbb{E}\big[X|X - Y\big]$.

   Il est plus facile d'utiliser un résultat de cours qui dit que $\mathbb{E}\big[X|X - Y\big] = a + b(X - Y)$, où a et b sont des constantes à déterminer. Pour ce faire, on utilise les équations $\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[X|X - Y\big]\Big] = \mathbb{E}\big[X\big]$, soit $a + b = 1$, et $\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[X|X - Y\big](X - Y)\Big] = \mathbb{E}\Big[X(X - Y)\Big]$, soit $a + 2b = 2$, on trouve donc $a = 0$, $b = 1$, et $\mathbb{E}\big[X|X - Y\big] = X - Y$.

   Encore plus rapide : on sait que $\mathbb{E}\big[X - Y|X - Y\big]$ vaut $X - Y$, et aussi que $\mathbb{E}\big[X - Y|X - Y\big] = \mathbb{E}\big[X|X - Y\big] - \mathbb{E}\big[Y|X - Y\big]$ (linéarité de l'espérance conditionnelle). Comme $\mathbb{E}\big[Y|X - Y\big]$ vaut zéro, on retrouve donc $\mathbb{E}\big[X|X - Y\big] = X - Y$.

Exercice 2 Exercice entièrement traité en cours et en TD, rappelons en particulier que l'autocorrélation **partielle** de X_t et X_{t-2} **n'est pas** l'autocorrélation de X_t et X_{t-2}. On redonne ici juste les résultats.

1. Le processus est stationnaire en tant que transformation linéaire d'un processus stationnaire, et on trouve $\gamma_X(k) = (1+a^2)\sigma^2 1_{k=0} + a\sigma^2 1_{|k|=1}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
2. L'autocorrélation partielle vaut $-\frac{a^2}{1+a^2+a^4}$.
3. La densité spectrale vaut $f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1 + a^2 + 2a\cos(\lambda))$ pour $-\pi < \lambda \leqslant \pi$.

Exercice 3

1. D'après la relation de l'énoncé, on a $\mathbb{E}\big[Y_t\big] = b\mathbb{E}\big[Y_{t-1}\big]$ puisque le processus X est centré. Comme l'énoncé suppose que Y est stationnaire, son espérance est constante et on en déduit que $\mathbb{E}\big[Y_t\big](1-b) = 0$, et on utilise le fait que $b \neq 1$ (et non $b \neq 0$!) pour conclure que Y est lui aussi centré.
2. La formule se vérifie facilement pour $k = 1$ ou $k = 2$ en remplaçant X_t par $\varepsilon_t + a\varepsilon_{t-1}$, puis Y_{t-1} par $bY_{t-2} + X_{t-1}$ et X_{t-1} par $\varepsilon_{t-1} + a\varepsilon_{t-2}$. Pour montrer la formule pour tout $k \geqslant 1$, il faut faire un raisonnement par récurrence sur k, et non pas sur t comme on le trouve dans certaines copies. On suppose donc que la formule de l'énoncé est vraie pour un $k \geqslant 1$, et on remplace dans la formule Y_{t-k} par $bY_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k} + a\varepsilon_{t-k-1}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
Y_t &= \varepsilon_t + (a+b)\sum_{j=1}^{k-1} b^{j-1}\varepsilon_{t-j} + ab^{k-1}\varepsilon_{t-k} + b^k(bY_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k} + a\varepsilon_{t-k-1}) \\
&= \varepsilon_t + (a+b)\sum_{j=1}^{k-1} b^{j-1}\varepsilon_{t-j} + ab^{k-1}\varepsilon_{t-k} + b^{k+1}Y_{t-k-1} + b^k\varepsilon_{t-k} + ab^k\varepsilon_{t-k-1} \\
&= \varepsilon_t + (a+b)\sum_{j=1}^{k-1} b^{j-1}\varepsilon_{t-j} + (a+b)b^{k-1}\varepsilon_{t-k} + b^{k+1}Y_{t-k-1} + ab^k\varepsilon_{t-k-1} \\
&= \varepsilon_t + (a+b)\sum_{j=1}^{k} b^{j-1}\varepsilon_{t-j} + ab^k\varepsilon_{t-k-1} + b^{k+1}Y_{t-k-1}
\end{aligned}$$

   ce qui est bien la formule de l'énoncé au rang $k+1$. La formule est donc vraie pour tout $k \geqslant 1$.
3. On rappelle que dire que la suite de variable aléatoires A_k tend vers A pour $k \to \infty$ signifie $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\big[(A_k - A)^2\big] = 0$. Ici comme $|b| < 1$, $b^k \to 0$, et on a donc l'idée que la limite que demande l'énoncé vaut aussi zéro. Par conséquent, on cherche à montrer que $\mathbb{E}\big[(ab^{k-1}\varepsilon_{t-k} + b^kY_{t-k})^2\big]$ tend vers 0. Comme tout est centré, cette espérance se réécrit en $a^2b^{2k-2}\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[\varepsilon_{t-k}] + b^{2k}\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_{t-k}] + 2ab^{2k-1}\,\mathbb{C}\mathrm{ov}[\varepsilon_{t-k}, Y_{t-k}]$. Dans cette somme, les deux variances ne dépendent pas de k car ε et Y sont des processus stationnaires, si bien que les deux premiers termes tendent vers zéro. Pour montrer que le troisième terme tend aussi vers zéro, il faut vérifier que $\mathbb{C}\mathrm{ov}[\varepsilon_{t-k}, Y_{t-k}]$ (qu'on ne connaît pas) est bornée pour tout k. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz rappelée dans l'énoncé :

$$|\,\mathbb{C}\mathrm{ov}[\varepsilon_{t-k}, Y_{t-k}]| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}[\varepsilon_{t-k}]\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_{t-k}]},$$

   et on sait que le membre de droite ne dépend pas de k. Par conséquent, on a bien que $ab^{k-1}\varepsilon_{t-k} + b^kY_{t-k}$ converge vers zéro dans L^2.

4. Comme les variables ε_t sont orthogonales et centrées, on a

$$\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{j=1}^{\infty} b^{j-1}\varepsilon_{t-j}\big)^2\Big] = \sum_{j=1}^{\infty} b^{j-1}\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[\varepsilon_{t-j}]$$
$$< +\infty,$$

par conséquent la série $\sum_{j=1}^{\infty} b^{j-1}\varepsilon_{t-j}$ est bien convergente au sens L^2. De plus, pour $k \geqslant 1$,

$$Y_t - \varepsilon_t - (a+b)\sum_{j=1}^{\infty} b^{j-1}\varepsilon_{t-j} = ab^{k-1}\varepsilon_{t-k} + b^k Y_{t-k} - (a+b)\sum_{j=k}^{\infty} b^{j-1}\varepsilon_{t-j}.$$

On sait déjà que $ab^{k-1}\varepsilon_{t-k} + b^k Y_{t-k}$ converge vers zéro dans L^2 pour $k \to +\infty$. Le terme $\sum_{j=k}^{\infty} b^{j-1}\varepsilon_{t-j}$ est par ailleurs le reste d'une série convergente dans L^2, il tend donc vers 0 dans L^2 pour $k \to +\infty$. Par conséquent, on a bien l'égalité de l'énoncé.

5. On va montrer comme il a été fait en cours magistral que la série $\sum_{j=1}^{\infty} b^{j-1}\varepsilon_{t-j}$ est absolument convergente avec probabilité 1. On étudie donc $\big(\sum_{j=1}^{n} |b|^{j-1}|\varepsilon_{t-j}|\big)_{n\geqslant 1}$, c'est une série à termes positifs, donc soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. Par conséquent, on veut montrer qu'elle tend vers $+\infty$ avec probabilité zéro. Par convergence monotone, on a

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{+\infty} |b|^{j-1}|\varepsilon_{t-j}|\Big] = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} |b|^{j-1}\mathbb{E}\big[|\varepsilon_{t-j}|\big] = \mathbb{E}\big[|\varepsilon_0|\big]\sum_{j=1}^{+\infty} |b|^{j-1} < +\infty,$$

par conséquent, $\sum_{j=1}^{+\infty} |b|^{j-1}|\varepsilon_{t-j}|$ admet une espérance finie. Cela implique notamment que cette série vaut $+\infty$ avec probabilité zéro (sans quoi l'espérance est infinie), ce qui montre le résultat.

6. On sait que $\mathbb{C}\mathrm{ov}[\varepsilon_t, Y_{t-k}] = \mathbb{C}\mathrm{ov}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k} + (a+b)\sum_{j=1}^{\infty} b^{j-1}\varepsilon_{t-j-k}]$. On a pris $k \geqslant 1$, si bien que $t \neq t-k-j$ pour tout $j \geqslant 0$. Comme ε est un bruit blanc, ε_t est donc orthogonal à ε_{t-j-k} pour tout $j \geqslant 0$, et donc ε_t est orthogonal à Y_{t-k}.
Prenons maintenant $k \geqslant 0$.

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}[Y_t, Y_{t-k}] = \mathbb{C}\mathrm{ov}\Big[\varepsilon_t + (a+b)\sum_{i=1}^{\infty} b^{i-1}\varepsilon_{t-i},\ \varepsilon_{t-k} + (a+b)\sum_{j=1}^{\infty} b^{j-1}\varepsilon_{t-j-k}\Big]$$
$$= \mathbb{C}\mathrm{ov}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}] + (a+b)\sum_{j=1}^{\infty} b^{j-1}\,\mathbb{C}\mathrm{ov}\big[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j-k}\big] + (a+b)\sum_{i=1}^{\infty} b^{i-1}\,\mathbb{C}\mathrm{ov}\big[\varepsilon_{t-i}, \varepsilon_{t-k}\big]$$
$$+(a+b)^2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b^{i+j-2}\,\mathbb{C}\mathrm{ov}\big[\varepsilon_{t-i}, \varepsilon_{t-j-k}\big].$$

Traitons chacun des quatre termes séparément. On a choisi $k \geqslant 0$, donc $\mathbb{C}\mathrm{ov}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}]$ vaut 0 si $k \geqslant 1$ et σ^2 si $k = 0$. Pour $j \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}\big[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j-k}\big] = 0$, donc le second terme est toujours nul. Pour $i \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}\big[\varepsilon_{t-i}, \varepsilon_{t-k}\big]$ est non nulle si et seulement si $k = i$, ce qui nécessite en particulier $k \geqslant 1$. On dans ce cas

$$(a+b)\sum_{i=1}^{\infty} b^{i-1}\,\mathbb{C}\mathrm{ov}\big[\varepsilon_{t-k}, \varepsilon_{t-i}\big] = (a+b)b^{k-1}\sigma^2.$$

Enfin pour $i \geqslant 1$, $j \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}\big[\varepsilon_{t-i}, \varepsilon_{t-j-k}\big]$ est non nulle si et seulement si $t - i = t - j - k$, ou encore $i = j + k$. Par conséquent on trouve donc

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b^{i+j-2}\, \mathbb{C}\mathrm{ov}\big[\varepsilon_{t-i}, \varepsilon_{t-j-k}\big] &= (a+b)^2 \sum_{j=1}^{\infty} b^{j+k+j-2}\, \mathbb{C}\mathrm{ov}\big[\varepsilon_{t-j-k}, \varepsilon_{t-j-k}\big] \\
&= (a+b)^2 b^{k-2} \sigma^2 \sum_{j=1}^{\infty} b^{2j} \\
&= \frac{(a+b)^2 \sigma^2}{1-b^2} b^k
\end{aligned}
$$

Au final, on obtient

$$
\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_t] = \Big(\frac{(a+b)^2}{1-b^2} + 1\Big)\sigma^2,
$$

et

$$
\mathbb{C}\mathrm{ov}[Y_t, Y_{t-k}] = \Big(\frac{a+b}{b} + \frac{(a+b)^2}{1-b^2}\Big) b^k \sigma^2.
$$

Pour $k \leqslant 0$, on a bien sûr $\mathbb{C}\mathrm{ov}[Y_t, Y_{t-k}] = \mathbb{C}\mathrm{ov}[Y_t, Y_{t+k}]$ puisque le processus est supposé stationnaire.

7. La densité spectrale f_Y est donnée par

$$
f_Y(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\mathrm{ov}[Y_t, Y_{t-k}] \exp(ik\lambda)
$$

pour $\lambda \in]-\pi, \pi]$. Pour simplifier les calculs, on peut écrire

$$
A = \Big(\frac{(a+b)^2}{1-b^2} + 1\Big)\sigma^2
$$

et pour $|k| \geqslant 1$

$$
B = \Big(\frac{a+b}{b} + \frac{(a+b)^2}{1-b^2}\Big)\sigma^2,
$$

on a alors

$$
\begin{aligned}
f_Y(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\Big(A + B \sum_{k \geqslant 1} \big(b\mathrm{e}^{i\lambda}\big)^k + B \sum_{k \geqslant 1} \big(b\mathrm{e}^{-i\lambda}\big)^k\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(A + B\big(\frac{1}{1-b\mathrm{e}^{i\lambda}} + \frac{1}{1-b\mathrm{e}^{-i\lambda}} - 2\big)\Big).
\end{aligned}
$$

Si on est courageux, on peut alors poursuivre les calculs, en remarquant que $(1 - b\mathrm{e}^{i\lambda})(1 - b\mathrm{e}^{-i\lambda}) = |1 - b\mathrm{e}^{i\lambda}|^2$, et en remplaçant A et B par leurs valeurs, et on doit trouver au final

$$
f_Y(\lambda) = \frac{|1 - a\mathrm{e}^{i\lambda}|^2 \sigma^2}{|1 - b\mathrm{e}^{i\lambda}|^2 2\pi},
$$

cf. le cours sur les processus ARMA. Une réponse qui n'allait pas au bout de tous les calculs était cependant acceptable !