Université Paris 10 Année 2012–2013

M1 ISIFAR – Séries chronologiques

Examen de mi-semestre

Sans document ni calculatrice.
Les réponses seront soigneusement justifiées.
Les trois exercices peuvent être traités de manière indépendante.

Indications : *On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz : soient deux variables aléatoires de carré intégrable A et B, alors* $\left|\mathbb{E}[AB]\right| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}[A^2]\mathbb{E}[B^2]}$.
La densité d'un vecteur gaussien de dimension n d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^n$ *et de matrice de variance* Γ *est donnée quand* Γ *est inversible par*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \Gamma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^t\Gamma^{-1}(x-\mu)\right), \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 1 Soit $(X,Y)^t$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(\mu,\Gamma)$, avec $\mu = (1,0)^t$ et $\Gamma = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

1. Montrer que le vecteur $(X,Y)^t$ admet une densité et la déterminer.
2. Donner la loi du vecteur $(X-Y, X+Y)^t$.
3. Entre les quatre variables aléatoires X, Y, $X+Y$, $X-Y$, certaines sont-elles indépendantes ?
4. Que valent $\mathbb{E}[X|X-Y]$? $\mathbb{E}[Y|X-Y]$?

Exercice 2 Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc centré de variance σ^2, soit a un réel, et $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus donné par $X_t = \varepsilon_t + a\varepsilon_{t-1}$ pour $t \in \mathbb{Z}$.

1. Justifier que X est stationnaire, et donner sa fonction d'autocovariance γ_X.
2. Calculer l'autocorrélation partielle de X à l'ordre 2.
3. Donner la densité spectrale μ_X du processus X.

Exercice 3 Soient ε et X les mêmes processus qu'à l'exercice précédent. On admet qu'il existe un processus stationnaire $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ qui vérifie pour tout $t \in \mathbb{Z}$ la relation $Y_t = bY_{t-1} + X_t$, où b est un réel non nul tel que $|b| < 1$.

1. Quelle est l'espérance de Y ?
2. Montrer que pour $k \geqslant 1$ et pour $t \in \mathbb{Z}$, on a

$$Y_t = \varepsilon_t + (a+b)\sum_{j=1}^{k-1} b^{j-1}\varepsilon_{t-j} + ab^{k-1}\varepsilon_{t-k} + b^k Y_{t-k},$$

   où la somme du milieu vaut 0 pour $k = 1$.

3. Donner la limite dans L^2 de $ab^{k-1}\varepsilon_{t-k} + b^k Y_{t-k}$ pour $k \to \infty$ (vous pourrez commencer par obtenir une majoration de $|\mathbb{C}\mathrm{ov}[\varepsilon_{t-k}, Y_{t-k}]|$).

4. Montrer qu'on a
$$Y_t = \varepsilon_t + (a+b)\sum_{j=1}^{\infty} b^{j-1}\varepsilon_{t-j},$$
où le terme de droite est une série qui converge au sens L^2.
5. Montrer que cette série converge presque sûrement.
6. Montrer que ε_t est orthogonal à Y_{t-k} pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout $k \geqslant 1$. Que vaut la fonction d'autocovariance γ_Y de Y ?
7. Donner la densité spectrale de Y.