Université Paris X — Année Universitaire 2006/2007

Licence Sciences économiques, troisième année — **Statistiques**

Durée : 2h

Examen septembre 2007

Le formulaire et les calculatrices sont autorisés. Tout autre document est interdit.

Exercice 1 :

On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ où X a pour densité de probabilité :

$$f_a(x) = \frac{1}{a} \; exp\,(-\frac{(x - b)}{a}) \;\; \mathbf{1}_{[b,+\infty[}(x)$$

avec $a > 0$ inconnu et b connu.

On donne : $E(X) = a + b, \quad Var(X) = a^2$.
On se propose d'estimer a à l'aide de l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$.

1. Ecrire la fonction de vraisemblance de l'échantillon.
2. Donner l'estimateur $\hat{a}_n$ du maximum de vraisemblance de a.
3. L'estimateur $\hat{a}_n$ est-il un estimateur sans biais de a ?
4. L'estimateur $\hat{a}_n$ est-il un estimateur convergent de a ?
5. L'estimateur $\hat{a}_n$ est-il un estimateur efficace de a ?

Exercice 2 :

Une entreprise spécialisée dans la fabrication de confiseries s'engage à respecter certaines normes de fabrication concernant le pourcentage de colorant contenu dans ses produits. Ce pourcentage de colorant est modélisé par une variable aléatoire X supposée suivre une loi normale $N(m, \sigma^2)$. A la sortie de la chaîne de fabrication, on tire un échantillon de 9 mesures en pourcentages :

$$2,5 \quad 3 \quad 3,2 \quad 3,6 \quad 2 \quad 2,1 \quad 1,5 \quad 1,2 \quad 1$$

Si la moyenne du pourcentage de colorant est supérieure à 2, la fabrication est déclarée non conforme et détruite.

1. Au risque 5%, peut-on affirmer que la fabrication est bien conforme ?
2. Calculer la puissance du test pour $H_1 : m = 3$.
3. Construire un intervalle de confiance pour σ^2 au niveau de confiance 0,95 en justifiant les différentes étapes de la construction.

Exercice 3 :

Pour tester l'efficacité d'un vaccin antigrippal, on soumet 300 personnes à une expérience. On observe que sur 100 personnes non vaccinées, 32 sont atteintes par la grippe alors que sur 200 personnes vaccinées, 50 sont atteintes par la grippe. Peut-on, au risque 5%, accepter l'hypothèse que le vaccin est efficace ? *Pour répondre à cette question, utiliser un test du chi-deux.*

Exercice 4 :

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de loi normale de moyenne α et de variance $\alpha(1-\alpha)$ où α est un paramètre inconnu avec $0 < \alpha < 1$. On cherche à estimer le paramètre α. Pour cela, on propose deux estimateurs $\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\hat{\alpha}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

1. Montrer que $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{\alpha}_2$ sont des estimateurs convergents de α.
   On donne $V(X^2) = 2\alpha^2\ (1-\alpha^2)$.
2. Donner la loi asymptotique de $\hat{\alpha}_1$ puis de $\hat{\alpha}_2$ en justifiant votre réponse.