MASTER ISIFAR 2ème année Année 2007-2008

Examen d'Assurance

28 mars 2008

– Tous documents et appareils électroniques interdits –

Exercice 1. Soit N un processus de Poisson inhomogène d'intensité h. On pose $m(t) = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s$ et on suppose que h prend les valeurs suivantes :

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1]\ , \\ 2 & \text{si } t \in [1,2]\ , \\ 1 & \text{si } t \in [2,3]\ . \end{cases}$$

(i) Quelle est la loi du nombre total d'arrivées dans l'intervalle $[0,3]$.

(ii) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune arrivée avant la date $t = 2$.

(iii) Quelle est l'espérance du nombre d'arrivée entre la date $t = 2.5$ et la date $t = 3$.

On considère des coûts de sinistres i.i.d. $\{Y_i\}$ de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ et indépendants des instants d'arrivée $\{T_n\}$.

(vi) Quelle est la nature du processus ponctuel dont les points sont les couples (T_i, Y_i) ?

(vii) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait eu aucun sinistre de coût supérieur à 1 pendant la période $[2,3]$.

Exercice 2. On rappelle que la densité $f(\theta,\cdot)$ de la loi $\Gamma(a,\lambda)$, $a > 0$, $\lambda > 0$, $\theta = (a,\lambda)$, est définie par

$$f(\theta, x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, x^{a-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}\ .$$

Soit $Y_1, \cdots, Y_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $\Gamma(a,\lambda)$.

(i) Ecrire la log-vraisemblance $\ell(\theta, x_1, \cdots, x_n)$, que l'on notera $\ell(\theta)$.

(ii) Ecrire les équations permettant de déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ, noté $\hat{\theta}$. On notera Ψ la dérivée logarithmique de la fonction Γ.

(iii) Exprimer $\hat{a}$ en fonction de $\hat{\lambda}$ et expliquer brièvement comment on peut alors résoudre les équations de vraisemblance.

(iv) Indiquer comment tester l'ajustement des données à une loi Γ, la statistique de test et sa loi sous l'hypothèse nulle.

Exercice 3. Soit N une variable aléatoire à valeurs entieères et X une variable aléatoire positive. On définit, pour $z \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$L_N(z) = \mathbb{E}[z^N] \ , \quad \phi_X(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] \ .$$

Soit $\{X_i\}$ une suite de variables aléatoires positives i.i.d. de même loi que X et indépendante de N et soit S la variable définie par

$$S = \sum_{j=1}^{N} X_j \ .$$

(i) Calculer $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tS}]$ en fonction de L_N et ϕ_X.

(ii) On suppose que N suit la loi géométrique de paramètre p, définie par $\mathbb{P}(N = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \geq 1$ et que X suit la loi exponentielle de paramètre λ de densité $\lambda \mathrm{e}^{-x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$. Calculer L_N et ϕ_X en précisant le domaine de définition de ϕ_X.

(iii) Déduire des questions précédentes la loi de S.