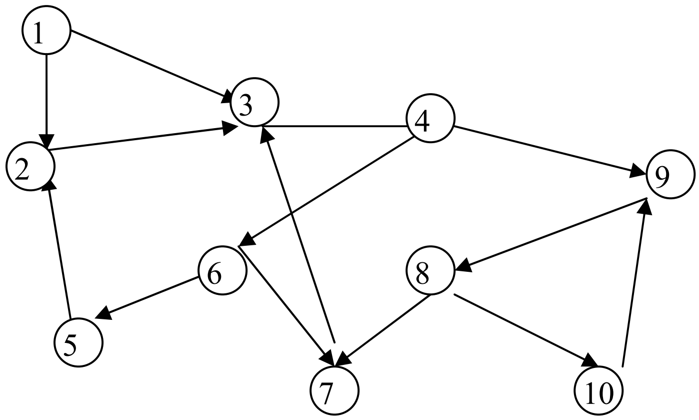
Examen d'algorithmique de graphes du 11 mai 2005

Durée 2h. Aucun document autorisé. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (11 points)

Considérons un graphe orienté G quelconque. Pour la suite on considèrera comme exemple le graphe suivant :



On définit l'algorithme suivant, sachant qu'à chaque sommet x est associé deux champs m et enc de type boolean initialisés à la valeur faux.

```
Procedure quoi (x : sommet de G)
x.enc= vrai
x.m=vrai
pour chaque successeur y de x
        si y.m est faux alors
                quoi(y)
        sinon
                si y.enc est vrai, alors retirer de G l'arc (x,y) finsi
        finsi
fin pour
x.enc=faux
fin proc
```

```
Procedure qui()
Initialiser les champs m et enc de tous les sommets ;
quoi(1) (on suppose que tous les sommets sont accessibles par un chemin depuis le sommet 1)
Fin proc
```

Question 1 : Dérouler l'exécution de la procédure qui pour l'exemple. On précisera les paramètres des différents appels récursifs, les modifications de valeur des champs m et enc, et le cas échéant les arcs retirés.

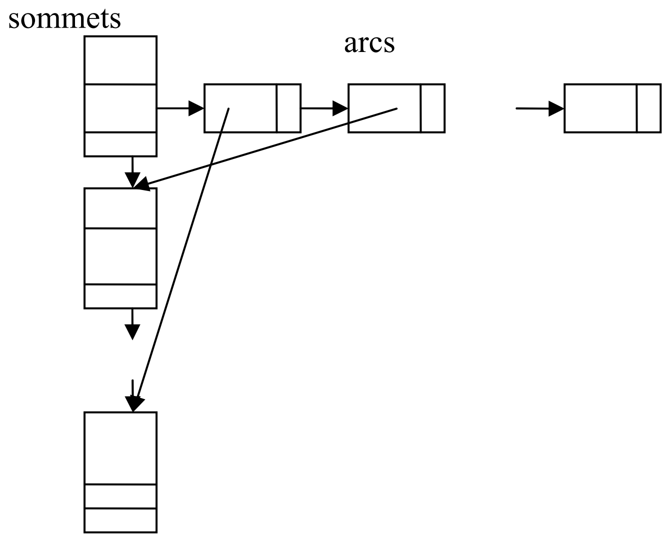
Question 2 : La procédure quoi est basée sur un parcours en profondeur.
Rappeler la définition des arcs avant, arrière et transverse d'un tel parcours.

Question 4 : Soit G' le graphe produit par l'application de la procédure qui au graphe G. On rappelle qu'un graphe est sans circuit si et seulement si un parcours en profondeur de ce graphe ne comporte pas d'arc arrière. Utiliser cette propriété pour montrer que G' est sans circuit.

Question 5 : En supposant que le graphe est représenté à l'aide de listes : c'est-à-dire que l'on dispose d'une liste chaînée de sommets, et chaque sommet possède une liste chaînée d'arcs incidents lesquels pointent sur le sommet successeur comme dans le schéma ci-dessous quelle est la complexité dans le pire des cas d'un appel à qui() (NB : on prendra soin d'évaluer la difficulté de retirer un arc du graphe avec cette représentation)

Question 6 : Rappeler la définition d'une numérotation topologique d'un graphe sans circuit. Déterminer une telle numérotation pour le graphe de la figure.

Question 7 : Que faut-il ajouter à la procédure quoi pour permettre de déterminer une telle numérotation ?



Exercice 2 (6 points)

Supposons qu'un graphe non orienté de n sommets soit représenté par sa matrice d'adjacence M (sommet-sommet). Ecrire un algorithme (en C ou pseudo-C) permettant de produire un parcours en largeur du graphe sous la forme d'un tableau indiquant, pour chaque sommet x, sa position P[x] dans le parcours.

Exercice 3 (3 points)

Réaliser les opérations d'insertion successives des éléments de clés suivantes dans un arbre 2-3 (c'est-à-dire un arbre a-b dont chaque nœud interne a au moins deux fils et au plus trois fils, et la racine au plus trois fils) :

3,5,8,2, 10,1,7

On dessinera l'état de l'arbre à chaque étape avant et après rééquilibrage.