

Examen septembre 2006

Le formulaire et les calculatrices sont autorisés. Tout autre document est interdit.

Exercice 1 : On considère un échantillon (X_1, \dots, X_n) où X a pour loi de probabilité:

$$P(X = x) = \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^{(x-1)} \quad \text{pour tout entier } x \geq 1 \text{ et } \theta > 1.$$

On rappelle: $E(X) = \theta$, $Var(X) = \theta^2 - \theta$.

On se propose d'estimer θ à l'aide de l'échantillon (X_1, \dots, X_n) .

1. Ecrire la fonction de vraisemblance de l'échantillon.
2. Donner l'estimateur $\hat{\theta}_n$ du maximum de vraisemblance de θ .
3. L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est-il un estimateur sans biais de θ ?
4. L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est-il un estimateur convergent de θ ?
5. L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est-il un estimateur efficace de θ ?
6. Pour un échantillon de taille $n = 100$, on a observé $\bar{x}_n = 15$.
 - (a) Préciser la loi asymptotique de $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\theta(\theta-1)}}$ en justifiant votre réponse.
 - (b) En déduire un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 0,95 en justifiant les différentes étapes de sa construction.

Exercice 2 : Dans l'atmosphère, le taux d'un gaz nocif pour un volume donné suit une loi normale d'espérance m et de variance σ^2 . On effectue n prélèvements indépendants de ce taux, conduisant aux observations (x_1, \dots, x_n) .

1. On sait que $\sigma^2 = 100$, mais on ne connaît pas m . Sur $n = 10$ prélèvements on a observé une valeur moyenne de 48.

Au risque 1%, peut-on affirmer que le taux moyen d'un gaz nocif est inférieur à 50?
2. On ne connaît ni m ni σ^2 . On a réalisé $n = 10$ prélèvements et observé une moyenne de 48 et une variance empirique égale à 100.

Au risque 1%, peut-on affirmer que le taux moyen d'un gaz nocif est inférieur à 50?
3. On ne connaît ni m ni σ^2 . On a réalisé $n = 200$ prélèvements et observé une moyenne de 48 et une variance empirique égale à 100.

Au risque 1%, peut-on affirmer que le taux moyen d'un gaz nocif est inférieur à 50?

Exercice 3 : Une entreprise souhaite modifier l'organisation du travail en créant des équipes autonomes.

Un sondage d'opinion est réalisé auprès de trois échantillons indépendants de salariés choisis au hasard dans l'entreprise: un groupe de 285 ouvriers, un groupe de 75 cadres moyens et un groupe de 40 cadres supérieurs. Chacun des 400 salariés interrogés doit dire s'il est favorable ou bien opposé à la réforme. Les résultats sont les suivants:

	ouvriers	cadres moyens	cadres supérieurs
favorable	184	49	31
opposé	101	26	9

1. Peut-on, au risque 1%, accepter l'hypothèse que dans l'entreprise l'opinion vis à vis de la réforme diffère suivant le type d'emploi?
2. Peut-on, au risque 1%, accepter l'hypothèse que chez les cadres (moyens ou supérieurs) de l'entreprise, une majorité est favorable à la réforme proposée?