CORRIGE DES EXERCICES : Estimation ponctuelle

Exercice 1

1) $\mathcal{P}$={enfants fréquentant la maternelle} de taille N inconnue
2) X= score au test de Pensée Créative de Torrance, variable quantitative dépendant de deux paramètres inconnus dans $\mathcal{P}$:
   μ = moyenne de X dans $\mathcal{P}$ = score moyen dans $\mathcal{P}$ et
   σ^2 = variance de X dans $\mathcal{P}$ = variance du score dans $\mathcal{P}$ (écart-type σ)
3) A partir de l'observation d'un échantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille n=20, l'estimation ponctuelle du score moyen μ est donnée par la moyenne empirique observée $\overline{x} = \frac{426}{20} = 21{,}3$ car $\sum_{i=1}^{n=20} x_i = 426$

   ➨ le score moyen des enfants de maternelle est estimé à 21,3 (points de score).

4) A partir de l'observation d'un échantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille n=20 :
   - l'estimation ponctuelle biaisée de la variance σ² est donnée par la variance empirique observée :
     $s^2 = \frac{9794}{20} - 21{,}3^2 = 489{,}7 - 453{,}69 = 36{,}01 \approx 36$ car $\sum_{i=1}^{n=20} x_i{}^2 = 9794$
     l'estimation ponctuelle biaisée de l'écart-type σ est donnée par l'écart-type empirique observé $s = \sqrt{36} = 6$
   - l'estimation ponctuelle sans biais de la variance σ² est donnée par la variance empirique observée sans biais :
     $s^2* = \frac{9794 - 20 \times 21{,}3^2}{19} = \frac{720{,}2}{19} = 37{,}9$
     (autre calcul : $s^2* = \frac{20}{19} \times s^2 \approx 1{,}0526 \times 36 \approx 37{,}9$)
     l'estimation ponctuelle sans biais de l'écart-type σ est donnée par l'écart-type empirique observé sans biais
     $s* = \sqrt{37{,}9} = 6{,}2$

   ➨ la variance du score des enfants de maternelle est estimée à 37,9 et son écart-type à 6,2 (points de score).

Exercice 2

1) $\mathcal{P}$={individus âgés de 20 à 30 ans} de taille N inconnue
2) X= temps nécessaire pour reproduire 16 modèles (mesuré en secondes), variable quantitative de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus dans $\mathcal{P}$
3) A partir de l'observation d'un échantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille n=15, l'estimation ponctuelle du temps moyen μ est donnée par la moyenne empirique observée $\overline{x} = \frac{6014}{15} = 400{,}93 \approx 401$ car $\sum_{i=1}^{n=15} x_i = 6014$

   ➨ le temps moyen des individus âgés de 20 à 30 ans est estimé à 401 secondes.

4) A partir de l'observation d'un échantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille n=15 :
   - l'estimation ponctuelle biaisée de la variance σ² est donnée par la variance empirique observée :
     $s^2 = \frac{2\,563\,408}{15} - 400{,}93^2 = 170\,893{,}87 - 160\,744{,}86 \approx 10\,149$ car $\sum_{i=1}^{n=15} x_i{}^2 = 2\,563\,408$
     l'estimation ponctuelle biaisée de l'écart-type σ est donnée par l'écart-type empirique observé
     $s = \sqrt{10\,149} = 100{,}74 \approx 101$
   - l'estimation ponctuelle sans biais de la variance σ² est donnée par la variance empirique observée sans biais :
     $s^2* = \frac{2\,563\,408 - 15 \times 400{,}93^2}{14} = \frac{152\,235}{14} = 10\,873{,}9 \approx 10\,874$
     (autre calcul : $s^2* = \frac{15}{14} \times s^2 \approx 1{,}0714 \times 10\,149 = 10\,873{,}9 \approx 10\,874$)
     l'estimation ponctuelle sans biais de l'écart-type σ est donnée par l'écart-type empirique observé sans biais
     $s* = \sqrt{10\,874} = 104{,}3$

   ➨ la variance du temps des individus âgés de 20 à 30 ans est estimée à 10 874 et son écart-type à 104,3 secondes.

Exercice 3

1) $\mathcal{P}$={patients lombalgiques} de taille N inconnue

2) X= sexe féminin, variable qualitative dichotomique (oui, non) caractérisée par un paramètre, inconnu dans $\mathcal{P}$:

p = proportion de femmes dans $\mathcal{P}$

Echantillon de taille n=262 de X issu de $\mathcal{P}$ dont 136 femmes

La proportion p de femmes dans $\mathcal{P}$ est estimée par la fréquence empirique observée $f = \frac{136}{262} \approx 0{,}519 = 51{,}9\%$

➡ la proportion de femmes chez les patients lombalgiques est estimée à 51,9%.

3) X= trouble psychologique, variable qualitative dichotomique : oui, non

p = proportion de troubles psychologiques dans $\mathcal{P}$, p inconnue dans $\mathcal{P}$

Echantillon de taille n=262 de X issu de $\mathcal{P}$ dont 99 présentent un trouble psychologique

La proportion (fréquence) des troubles psychologiques p dans $\mathcal{P}$ est estimée par la fréquence empirique observée $f = \frac{99}{262} \approx 0{,}378 = 37{,}8\%$

➡ la proportion (fréquence) des troubles psychologiques chez les patients lombalgiques est estimée à 37,8%.

Exercice 4

1) $\mathcal{P}$={patients souffrant de dépression résistante traités par antidépresseur pendant 28 jours} de taille N inconnue

2) X= amélioration de l'état clinique, variable qualitative dichotomique : oui, non

p = proportion d'amélioration de l'état clinique dans $\mathcal{P}$, p inconnue dans $\mathcal{P}$

3) A partir d'un échantillon de taille n=1 197 de X issu de $\mathcal{P}$, l'estimation ponctuelle de la proportion d'amélioration de l'état clinique p est donnée par la fréquence empirique observée $f = \frac{1113}{1197} \approx 0{,}9298 \approx 0{,}93 = 93\%$

➡ la proportion d'amélioration de l'état clinique, chez les patients souffrant de dépression résistante traités par antidépresseur pendant 28 jours, est estimée à 93%.

Exercice 5

$\mathcal{P}$ ={adolescents français de 12 à 20 ans} de taille N inconnue

X= consommation de psychotropes, variable qualitative dichotomique : oui, non

p = proportion de consommateurs de psychotropes dans $\mathcal{P}$

= fréquence de consommation de psychotropes dans $\mathcal{P}$ p inconnue dans $\mathcal{P}$

Echantillon de taille n=3 279 de X issu de $\mathcal{P}$:

l'estimation ponctuelle de p est donnée par la fréquence empirique observée $f = \frac{689}{3\,279} = 0{,}21 = 21\%$

➡ la proportion d'adolescents français de 12 à 20 ans consommateurs de psychotropes est estimée à 21%.

$\mathcal{P}_1$={adolescents français de 12 à 20 ans, de sexe féminin} de taille inconnue

X= consommation de psychotropes, variable qualitative dichotomique : oui, non

p_1 = proportion de consommatrices de psychotropes dans $\mathcal{P}_1$

= fréquence de consommation de psychotropes dans $\mathcal{P}_1$ p_1 inconnue dans $\mathcal{P}_1$

Echantillon de taille n_1=1 728 de X issu de $\mathcal{P}_1$:

l'estimation ponctuelle de p_1 est donnée par la fréquence empirique observée $f_1 = \frac{475}{1728} = 0{,}275 = 27{,}5\%$

➡ la proportion d'adolescentes françaises de 12 à 20 ans consommatrices de psychotropes est estimée à 27,5%.

$\mathcal{P}_2$={adolescents français de 12 à 20 ans, de sexe masculin} de taille inconnue

X= consommation de psychotropes, variable qualitative dichotomique : oui, non

p_2 = proportion de consommateurs de psychotropes dans $\mathcal{P}_2$

= fréquence de consommation de psychotropes dans $\mathcal{P}_2$ p_2 inconnue dans $\mathcal{P}_2$

Echantillon de taille n_2=3 279−1 728=1 551 de X issu de $\mathcal{P}_2$:

l'estimation ponctuelle de p_2 est donnée par la fréquence empirique observée $f_2 = \frac{689-475}{1\,551} = \frac{214}{1\,551} = 0{,}138 = 13{,}8\%$

➡ la proportion d'adolescents français garçons de 12 à 20 ans consommateurs de psychotropes est estimée à 13,8%.

Exercice 6

1) $\mathcal{P}$={personnes} de taille N inconnue
2) X= score à un inventaire d'évaluation de l'humeur, variable quantitative de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus dans $\mathcal{P}$

score x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	total
effectif n_i	2	2	5	3	14	37	32	39	35	16	16	13	2	
n_ix_i	2	4	15	12	70	222	224	312	315	160	176	156	26	Σn_ix_i=1 694
x_i^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	
$n_ix_i^2$	2	8	45	48	350	1332	1568	2496	2835	1600	1936	1872	338	$\Sigma n_ix_i^2$=14 430

3) A partir de l'observation d'un échantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille n=216, l'estimation ponctuelle du résultat moyen μ est

donnée par la moyenne empirique observée $\overline{x} = \dfrac{1694}{216} \approx 7{,}8$ car $\sum_{i=1}^{n=216} n_i x_i = 1694$

➨ le score moyen des personnes de $\mathcal{P}$ est estimé à 7,8 (points de score).

4) A partir de l'observation d'un échantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille n=216 :

- l'estimation ponctuelle biaisée de la variance σ² est donnée par la variance empirique observée :

$s^2 = \dfrac{14\,430}{216} - 7{,}8^2 = 66{,}8 - 61{,}5 \approx 5{,}3$ car $\sum_{i=1}^{n=216} n_i x_i^2 = 14\,430$

l'estimation ponctuelle biaisée de l'écart-type σ est donnée par l'écart-type empirique observé $s = \sqrt{5{,}3} \approx 2{,}3$

- l'estimation ponctuelle sans biais de la variance σ² est donnée par la variance empirique observée sans biais :

$s^2{*} = \dfrac{14\,430 - 216 \times 7{,}8^2}{215} = \dfrac{1144{,}6}{215} \approx 5{,}3$

(autre calcul : $s^2{*} = \dfrac{216}{215} \times s^2 \approx 1{,}0047 \times 5{,}3 \approx 5{,}3$)

l'estimation ponctuelle sans biais de l'écart-type σ est donnée par l'écart-type empirique observé sans biais
$s{*} = \sqrt{5{,}3} = 2{,}3$

➨ la variance du score des personnes de $\mathcal{P}$ est estimée à 5,3 et son écart-type à 2,3 (points de score).

remarque : ici n=216 est "grand" $\sqrt{\dfrac{n}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{216}{215}} \approx \sqrt{1{,}0047} \approx 1{,}0023 \approx 1$ donc les deux estimations sans biais s* et biaisée s sont proches

Exercice 7

1) $\mathcal{P}$={handicapés mentaux} de taille N inconnue
2) X= résultat à un test de dextérité manuelle, variable quantitative de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus dans $\mathcal{P}$
3) A partir de l'observation d'un échantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille n=16, l'estimation ponctuelle du résultat moyen μ est

donnée par la moyenne empirique observée $\overline{x} = \dfrac{1136}{16} = 71$ car $\sum_{i=1}^{n=16} x_i = 1136$

➨ le résultat moyen des handicapés mentaux est estimé à 71.

4) A partir de l'observation d'un échantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille n=16 :

- l'estimation ponctuelle biaisée de la variance σ² est donnée par la variance empirique observée :

$s^2 = \dfrac{80\,832}{16} - 71^2 = 5\,052 - 5\,041 = 11$ car $\sum_{i=1}^{n=16} x_i^2 = 80\,832$

l'estimation ponctuelle biaisée de l'écart-type σ est donnée par l'écart-type empirique observé $s = \sqrt{11} \approx 3{,}317 \approx 3{,}3$

- l'estimation ponctuelle sans biais de la variance σ² est donnée par la variance empirique observée sans biais :

$s^2{*} = \dfrac{80\,832 - 16 \times 71^2}{15} = \dfrac{176}{15} \approx 11{,}73$

(autre calcul : $s^2{*} = \dfrac{16}{15} \times s^2 \approx 1{,}0667 \times 11 \approx 11{,}73$)

l'estimation ponctuelle sans biais de l'écart-type σ est donnée par l'écart-type empirique observé sans biais
$s{*} = \sqrt{11{,}73} = 3{,}425 \approx 3{,}4$

➨ la variance du résultat des handicapés mentaux est estimée à 11,7 et son écart-type à 3,4.

Exercice 8

$\mathcal{P}$ ={femmes norvégiennes âgées de 20 à 49 ans} de taille N inconnue
X= présence d'une dépression , variable qualitative dichotomique : oui, non
p = proportion de dépression dans $\mathcal{P}$ = fréquence de dépression dans $\mathcal{P}$, p inconnue dans $\mathcal{P}$

Echantillon de taille n=3 103 de X issu de $\mathcal{P}$

1) L'estimation ponctuelle de p est donnée par la fréquence empirique observée $f = \frac{571}{3\,103} = 0{,}184 = 18{,}4\%$

➨ la proportion de femmes norvégiennes âgées de 20 à 49 ans dépressives est estimée à 18,4%.

2) $\mathcal{P}_1$={femmes norvégiennes au foyer âgées de 20 à 49 ans} de taille inconnue

p_1 = proportion de dépression dans $\mathcal{P}_1$, p_1 inconnue dans $\mathcal{P}_1$, échantillon de taille n_1=702 de X issu de $\mathcal{P}_1$:

l'estimation ponctuelle de p_1 est donnée par la fréquence empirique observée $f_1 = \frac{160}{702} = 0{,}228 = 22{,}8\%$

➨ la proportion de femmes dépressives parmi les femmes norvégiennes au foyer âgées de 20 à 49 ans est estimée à 22,8%.

$\mathcal{P}_2$={femmes norvégiennes en activité professionnelle âgées de 20 à 49 ans} de taille inconnue

p_2 = proportion de dépression dans $\mathcal{P}_2$, p_2 inconnue dans $\mathcal{P}_2$, échantillon de taille n_2=3 103-702=2 401 de X issu de $\mathcal{P}_2$: l'estimation ponctuelle de p_2 est donnée par la fréquence empirique observée $f_2 = \frac{411}{2\,401} = 0{,}171 = 17{,}1\%$

➨ la proportion de femmes dépressives parmi les femmes norvégiennes en activité professionnelle, âgées de 20 à 49 ans est estimée à 17,1%.

Exercice 9

$\mathcal{P}$ ={nouveau-nés prématurés (nés avant 30 semaines de gestation)} de taille N inconnue
X= score d'Apgar à 5 mn, variable quantitative de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus dans $\mathcal{P}$
Echantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille n=70

1) L'estimation ponctuelle de μ est donnée par la moyenne empirique observée $\bar{x} = \frac{567}{70} = 8{,}1$

➨ le score d'Apgar moyen des nouveau-nés prématurés est estimé à 8,1.

2) • l'estimation ponctuelle biaisée de la variance σ² est donnée par la variance empirique observée :

$$s^2 = \frac{4817}{70} - 8{,}1^2 = 68{,}81 - 65{,}61 \approx 3{,}2$$

l'estimation ponctuelle biaisée de l'écart-type σ est donnée par l'écart-type empirique observé $s = \sqrt{3{,}2} = 1{,}79$

• l'estimation ponctuelle sans biais de la variance σ² est donnée par la variance empirique observée sans biais :

$$s^{2}* = \frac{4817 - 70 \times 8{,}1^2}{69} = \frac{224{,}3}{69} = 3{,}25$$

(autre calcul : $s^{2}* = \frac{70}{69} \times s^2 \approx 1{,}01449 \times 3{,}2 \approx 3{,}25$)

l'estimation ponctuelle sans biais de l'écart-type σ est donnée par l'écart-type empirique observé sans biais $s* = \sqrt{3{,}25} = 1{,}8$

➨ la variance du score d'Apgar des nouveau-nés prématurés est estimée à 3,25 et son écart-type à 1,8.

Exercice 10

$\mathcal{P}$ ={enfants atteints d'otite moyenne avec écoulement (OME) bilatérale chronique} de taille N inconnue
X= score de Reynell, variable quantitative de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus dans $\mathcal{P}$
Echantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille n=77

1) L'estimation ponctuelle de μ est donnée par la moyenne empirique observée $\bar{x} = \frac{-27}{77} = -0{,}35$

➨ le score de Reynell moyen des enfants atteints d'OME bilatérale chronique est estimé à –0,35.

2) • l'estimation ponctuelle biaisée de la variance σ² est donnée par la variance empirique observée :

$$s^2 = \frac{86}{77} - (-0{,}35)^2 = 1{,}1169 - 0{,}1225 \approx 0{,}994$$

l'estimation ponctuelle biaisée de l'écart-type σ est donnée par l'écart-type empirique observé $s = \sqrt{0{,}994} = 0{,}997$

• l'estimation ponctuelle sans biais de la variance σ² est donnée par la variance empirique observée sans biais :

$$s^2* = \frac{86-\left(77\times(-0{,}35)^2\right)}{76} = \frac{76{,}53}{76} = 1{,}007 \approx 1$$

(autre calcul : $s^2* = \frac{77}{76}\times s^2 \approx 1{,}01316\times 0{,}994 \approx 1{,}01$)

l'estimation ponctuelle sans biais de l'écart-type σ est donnée par l'écart-type empirique observé sans biais $s* = \sqrt{1} = 1$

➨ la variance du score de Reynell des enfants atteints d'OME bilatérale chronique est estimée à 1 et son écart-type à 1.

Exercice 11

$\mathcal{P}$={personnes de plus de 66 ans consommateurs de TCA} de taille N inconnue
X= survenue d'une fracture de hanche, variable qualitative dichotomique : oui, non
p = proportion de fracture de hanche dans $\mathcal{P}$ = fréquence de fracture de hanche dans $\mathcal{P}$, p inconnue dans $\mathcal{P}$

Echantillon de taille n=5 838 de X issu de $\mathcal{P}$

L'estimation ponctuelle de p est donnée par la fréquence empirique observée $f = \frac{1\,493}{5\,838} = 0{,}2557 \approx 0{,}256 = 25{,}6\%$

➨ la fréquence des fractures de hanche chez les personnes de plus de 66 ans consommateurs de TCA est estimée à 25,6%.

Exercice 12

1) Réponses exactes : *a* ou *g* ou éventuellement *f* (manque de précision)
2) Réponses exactes : *h* si réponse *a* en 1) ou *j* si réponse *g* en 1) ou éventuellement *f* (manque de précision)
3) Réponse exacte : *a*
4) Réponse exacte : *c*
5) Réponses exactes : *b* ou *e*, ou éventuellement *d* (ne répond pas explicitement à la question posée)

Exercice 13

1) Réponses exactes : *d* ou éventuellement *e* (manque de précision)
2) Réponse exacte : *d*
3) Réponse exacte : *c*
4) Réponse exacte : *b*
5) Réponses exactes : *d* ou éventuellement *e* (ne répond pas explicitement à la question posée)
6) Réponse exacte : *c* car $s* = \sqrt{\frac{38}{37}}\times s \approx 1{,}01342\times 2{,}96 \approx 2{,}9997 \approx 3$ (*e* ne répond pas à la question posée)