

## Examen final - Février 2007

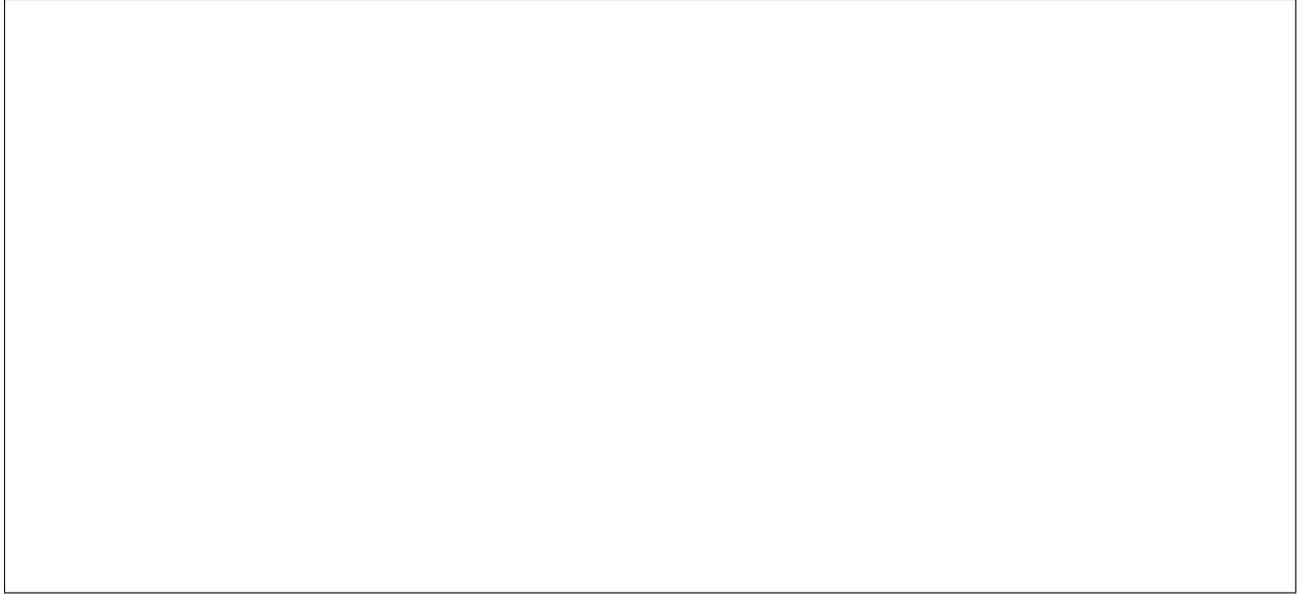
Durée : 2h

*L'usage des calculatrices, des téléphones portables et d'appareils électroniques est interdit.  
Il sera tenu compte de la rigueur et du soin apportés à la rédaction de la copie.*

**EXERCICE 1.** Soit  $f$  la fonction définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = ex^2 - e^{x^2}$ .

**Question 1.** Étudier la monotonie de  $f$ .

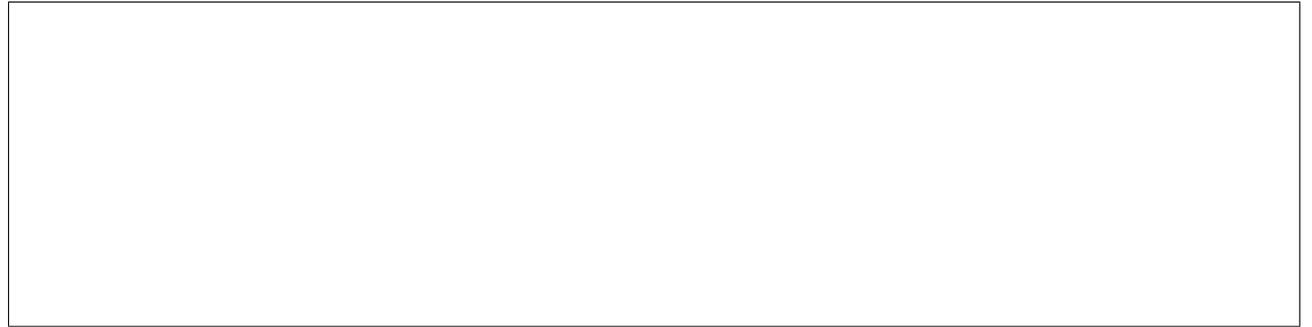
**Question 2.** Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .



**EXERCICE 2.** Soit  $f$  la fonction réelle définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 6x^2 + 1$

**Question 3.** Déterminer les extrema locaux éventuels de  $f$  en précisant leur nature.





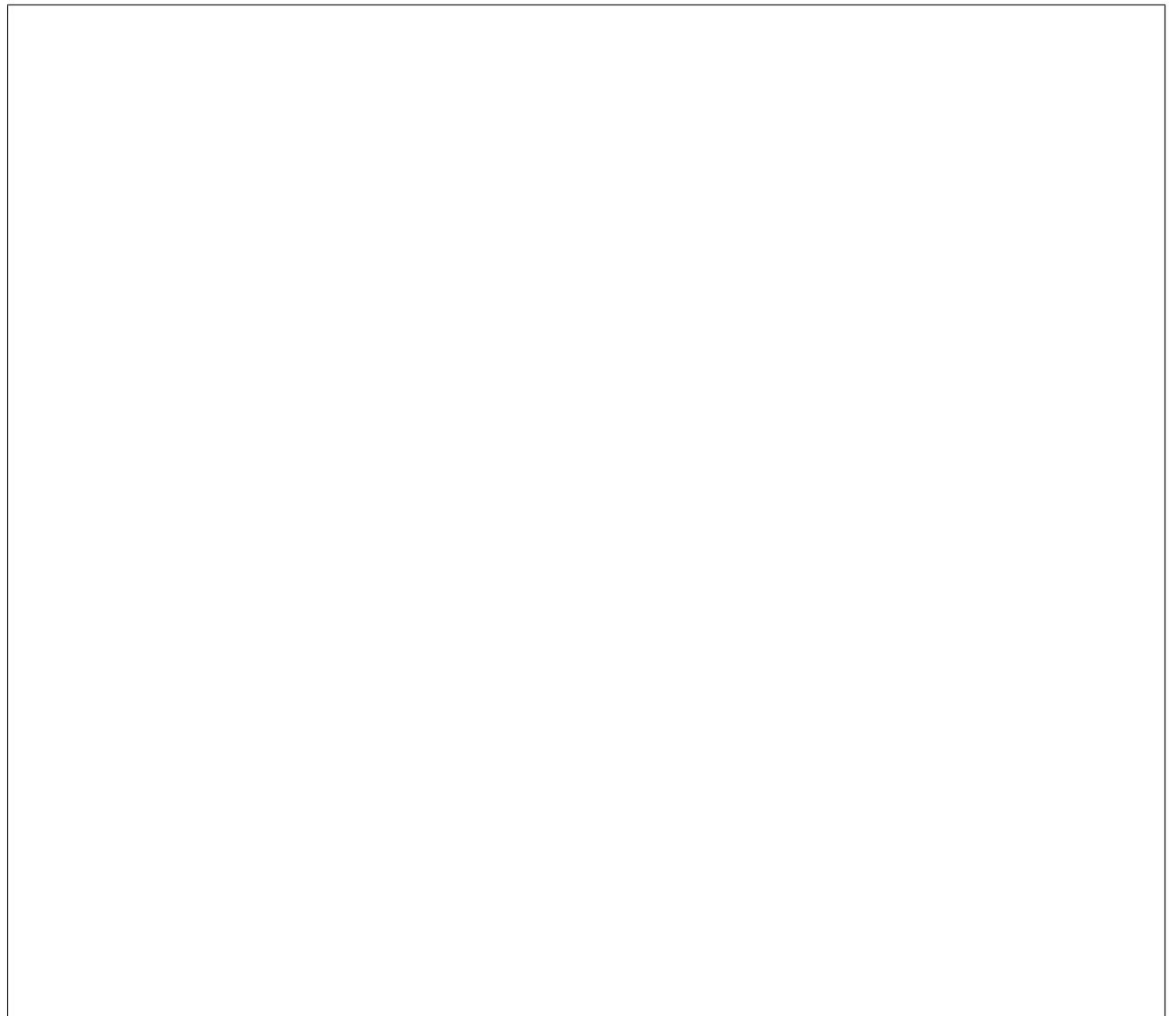
**EXERCICE 3.** Soient  $\alpha$  un réel **non nul** et  $f$  la fonction définie par  $f(x) = e^{\sqrt{1+2x}-1} - \alpha \ln(1+x)$ .

Nous rappelons que :  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x)$ ,  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon_2(x)$

et  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_3(x)$  où  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_i(x) = 0$ .

*Note : On pourra répondre aux questions 5 et 6 même si on n'a pas répondu à la question 4.*

**Question 4.** Déterminer le développement limité de  $f$  à l'ordre 2 en 0.



**Question 5.** Donner l'équation de la tangente au graphe de  $f$  au point d'abscisse 0.

**Question 6.** Préciser, selon les valeurs de  $\alpha$ , la position du graphe de  $f$  par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

**EXERCICE 4.** Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  la suite réelle de terme général

$$U_n = \frac{\sin^2(1)}{3^1} + \frac{\sin^2(2)}{3^2} + \frac{\sin^2(3)}{3^3} + \dots + \frac{\sin^2(n)}{3^n}.$$

**Question 7.** Montrer que  $(U_n)_{n \geq 1}$  est croissante.

**Question 8.** Montrer que  $(U_n)_{n \geq 1}$  est majorée (*indication : on pourra majorer chaque terme de  $U_n$* ).

**Question 9.** En déduire que  $(U_n)_{n \geq 1}$  converge vers un nombre réel  $\ell$  tel que  $\ell \leq \frac{1}{2}$ .

**EXERCICE 5.** (*Nous ne demandons pas de calculs numériques.*) Un étudiant de l'université Paris X a fait le placement suivant : Il a ouvert un compte épargne et y a déposé 100 euros le 1er janvier 2007 et, chaque 1er janvier des années suivantes, il dépose la somme de 100 euros sur ce compte épargne dont le taux d'intérêt annuel est fixe et s'élève à 4 pour cent.

**Question 10.** Quel est le capital disponible au terme de la  $n^{\text{ème}}$  année ?.

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the upper half of the page. It is intended for the student to write their answer to the question below.

**Question 11.** Quel est le montant des intérêts obtenus par l'étudiant après  $n$  années ?

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the lower half of the page. It is intended for the student to write their answer to the question above.