Université Paris X
Mathématiques 1

Licence Économie et Gestion
P. Bertail, S. Mehdi, L. Mesnager

Épreuve intermédiaire du 4 décembre 2007

Durée : 2h.

L'usage des calculatrices, des téléphones portables et de tout appareil électronique est interdit.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :
1)
$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+4}-3}$$
2)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2}-e^{x^3}}{x^3-x^2}.$$

Exercice 2. Soient
$$f\colon x \mapsto \ln\left(1+e^{2x}\right) \text{ et } \quad g\colon x\mapsto \sqrt{x}$$
Calculer la dérivée de la fonction composée $f\circ g$.

Exercice 3. Considérons la fonction réelle f définie par
$$f(x) = 4x^3 e^{-x}.$$
1) Calculer la dérivée f' de f.
2) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 ?

Exercice 4. Soit la fonction
$$f\colon x\mapsto \frac{\sin x}{x+x^3}$$
1) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^\star$.
2) a) Déterminer la limite
$$\lim_{x\to 0} f(x).$$
b) Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?
3) Déterminer la limite
$$\lim_{x\to +\infty} f(x).$$

Exercice 5. On considère la fonction réelle
$$f\colon x\mapsto \ln\left(1+e^{x+\frac{1}{x}}\right).$$
1) Montrer que f admet une asymptote horizontale en $-\infty$.
2) Montrer que
$$f(x)-x = \ln\left(e^{-x}+e^{\frac{1}{x}}\right)$$
pour tout $x\in\mathbf{R}^\star$.
3) Quelle est la limite de $e^{-x}+e^{\frac{1}{x}}$ lorsque $x\to+\infty$?
4) En déduire la limite de $f(x)-x$, et montrer que la droite $y=x$ est asymptote oblique à f en $+\infty$.

Corrigé

Exercice 1.

1) On multiplie par les formes conjuguées : pour $x \neq 5$ assez proche de 5,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+4}-3} &= \frac{(x-1)-4}{(x+4)-9} \times \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x-1}+2}\\ &= \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x-1}+2}\\ &\underset{x\to 5}{\longrightarrow} \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

2) On écrira simplement

$$\frac{e^{x^2}-e^{x^3}}{x^3-x^2} = -\frac{e^{x^3}}{x^3} \times \frac{1-e^{x^2-x^3}}{1-1/x}.$$

On a tout d'abord $1-1/x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, puis, dans la mesure où $x^2-x^3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, $1-e^{x^2-x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Enfin, par théorèmes de comparaison on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^3}}{x^3} = +\infty,$$

donc finalement

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}-e^{x^3}}{x^3-x^2} = -\infty.$$

Exercice 2. f est dérivable sur $\mathbf{R}$ puisque $x \mapsto 1+e^{2x}$ est dérivable et strictement positive pour tout x, avec

$$f'(x) = \frac{2\,e^{2x}}{1+e^{2x}}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

g est dérivable sur $]0,+\infty[$ d'après le cours avec

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \forall x \in]0,+\infty[.$$

Donc $f \circ g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x) &= g'(x)\,f'(g(x))\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{e^{2\sqrt{x}}}{1+e^{2\sqrt{x}}}.\end{aligned}$$

Exercice 3.

1) f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$, avec

$$f'(x) = \left(12x^2 - 4x^3\right)e^{-x}.$$

2) Calculons la limite de f en $+\infty$: on a

$$f(x) = 4\frac{x^3}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par théorèmes de comparaison. Lorsque $x \to -\infty$, on a $x^3 \to -\infty$ et $e^{-x} \to +\infty$, donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

3) La tangente à la courbe au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + (x-a)f'(a)$. Comme $f(0)=0$ et $f'(0)=0$, la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = 0$$

– il s'agit de l'axe horizontal.

Exercice 4.

1) Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto x + x^3$ sont définies sur $\mathbf{R}$ et continues d'après le cours. La fonction $x \mapsto x + x^3 = x(1+x^2)$ a pour unique racine $x=0$, donc f est définie et continue sur $\mathbf{R}^\star$.

2) a) On écrit

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1+x^2}.$$

Lorsque $x \to 0$, le premier facteur tend vers 1 d'après le cours. Le second facteur tend également vers 1. On a donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

b) On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

3) Pour tout $x > 0$, on a

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par conséquent

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 5.

1) Lorsque $x \to -\infty$, on a

$$x + \frac{1}{x} \longrightarrow -\infty, \text{ donc } 1 + e^{x + \frac{1}{x}} \longrightarrow 1 \text{ et } f(x) \longrightarrow 0.$$

La droite $y = 0$ est donc asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

2) On écrit

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln\left(1 + e^{x + \frac{1}{x}}\right) - \ln(e^x) \\ &= \ln\left(e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}\right). \end{aligned}$$

3) On a $e^{-x} \to 0$ et $e^{1/x} \to 1$ lorsque $x \to +\infty$, donc la limite de la somme est 1.

4) Par continuité du logarithme, on a $f(x) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on a donc montré que la droite $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

Proposition de barême

Exercice 1. 4 points : 2 points par question.
Exercice 2. 3 points : 2 pour la dérivée, 1 pour le domaine.
Exercice 3. 4 points : 1 par question.
Exercice 4. 4 points : 1 par question.
Exercice 5. 5 points : 2 pour la première question, puis 1 par question.