

THÉORIES DE LA CROISSANCE

Épreuve du 2 février 2007 – Durée 2 heures – Toute sortie est définitive

Documents et calculatrices non autorisés

1. [6 points] Le modèle AK , interprétation, portée et limites.
2. [6 points] Préférence des agents pour le présent et accumulation du capital.
3. [8 points] Imaginons une économie où tous les individus sont identiques. Ils confient leur sort à un planificateur bienveillant. Ce dernier se donne pour objectif de maximiser le bien-être de la collectivité à l'instant présent et pour les temps à venir. La population croît au taux n . La technique de production est $F(K(t), L(t)) = K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. En notant $k(t)$ le capital par unité de travail, on a $f(k(t)) = k(t)^\alpha$ où $f(k(t))$ est le produit net par unité de travail. Soit $u(c(t))$ l'utilité au temps t d'un individu, $c(t)$ le niveau de consommation par unité de travail, $u'(c(t)) > 0$ et $u''(c(t)) < 0$.

3.1. Au temps $t = 0$, le planificateur souhaite maximiser W avec

$$W = \int_0^\infty e^{-\theta t} u(c(t)) dt$$

θ est un taux d'actualisation, supposé positif.

Commentez.

3.2. Le planificateur doit tenir compte de quelques contraintes et formule son problème de la manière suivante :

$$\max \int_0^\infty e^{-\theta t} u(c(t)) dt$$

sous les contraintes

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - n k(t)$$

$$k(t) > 0 \quad \text{et} \quad c(t) > 0$$

$$k(0) = k_0$$

Commentez.

3.3. On donne $n = 0,02$, $\theta = 0,08$ et $\alpha = 0,5$.

a) Caractérisez le régime de croissance à taux constant (produit par unité de travail, consommation par unité de travail).

b) En $t = 0$ la productivité marginale du capital vaut 0,12. Comment l'économie va-t-elle évoluer ? Vous préciserez si la consommation par tête commence par croître ou par décroître.

c) Si les individus s'étaient conformés aux lois d'une économie concurrentielle, que serait-il advenu ?

Éléments de corrigé

1. Cf. cours

2. Cf. cours

3.1. L'économie est confiée à un planificateur. L'horizon temporel est infini. Le critère adopté représente la somme actualisée de l'utilité d'un individu identique à tous les autres. L'utilité dépend du niveau de consommation. Le taux θ reflète l'impatience des agents (une préférence pour la consommation présente).

3.2. Le planificateur cherche de quelle manière doit évoluer la consommation (ou l'épargne) au cours du temps de façon à maximiser l'utilité intertemporelle sous une contrainte d'accumulation (le capital par tête varie en fonction du niveau de consommation et du taux de croissance de la population) et des contraintes de positivité des variables.

Pour résoudre le programme du planificateur, on écrit l'hamiltonien :

$$H(t) = e^{-\theta t} u(c(t)) + \mu(t) [f(k(t)) - n k(t) - c(t)]$$

$\mu(t)$ est la variable duale associée à la variable $k(t)$, c'est la valeur en termes d'utilité, actualisée au temps zéro, que rapporte une unité d'investissement supplémentaire (par unité de travail). L'hamiltonien est analogue au concept de produit net (consommation plus investissement). La consommation et l'investissement sont mesurés en unités d'utilité et non en unités de biens. L'hamiltonien représente la valeur du produit par travailleur en termes d'utilité actualisée au temps $t = 0$.

3.3. a) Le régime de croissance optimale à taux constant est tel que $f'(k(t)) = n + \theta$. On a donc :

$$\frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}} = 0,10 \quad \text{ou} \quad k^{-\frac{1}{2}} = 0,20$$

et en notant $\hat{k}$, $\hat{y}$ et $\hat{c}$ les valeurs optimales, $\hat{k} = 25$ ce qui donne $\hat{y} = 5$ et $\hat{c} = 4,5$ car $\hat{c} = \hat{y} - n\hat{k}$

b) Si en $t = 0$, $f'(k(t)) = 0,12$, la productivité marginale du capital est relativement élevée, l'économie n'a pas encore assez investi pour que la consommation soit maximale. La consommation par tête va commencer par décroître (pour assurer le supplément d'épargne qui permettra d'augmenter le capital par tête et la production) puis elle sera croissante sur le sentier d'expansion.

c) Résultats identiques en économie décentralisée concurrentielle (cf. cours).