Université de Paris X Nanterre
U.F.R. Segmi
Licence Economie-Gestion deuxième année

Année 2005-2006

Résumé du cours de probabilité
Deuxième partie

6 Lois à densité

Définition 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une application telle que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\ .$$

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ un variable aléatoire réelle. On dit que la loi de X (ou simplement X) admet la densité f si, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Proposition 1. *La densité caractérise la loi. Toute fonction positive f d'intégrale 1 est une fonction de densité. Si f est nulle sur un ensemble A, alors $\mathbb{P}(X \in A) = 0$. Réciproquement, si I est un intervalle ouvert, fini ou infini, et si $\mathbb{P}(X \in I) = 0$ alors f est identiquement nulle sur I.*

Exemple 1 (Loi uniforme sur $[0,1]$). Soit $f : \mathbb{R} \to [0,1]$, telle que $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$. Alors f est une fonction de densité. C'est la densité de la loi dite uniforme sur $[0,1]$. Une variable uniforme sur $[0,1]$ ne prend aucune valeur hors de l'intervalle $[0,1]$.

Exemple 2 (Loi exponentielle). Soit $f : \mathbb{R} \to [0,1]$, telle que $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$. Alors f est une fonction de densité. C'est la densité de la loi exponentielle. Une variable de loi exponentielle ne prend que des valeurs positives.

Soit X une variable de loi exponentielle et soit $x > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(X > x) = \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\ .$$

Par exemple, $\mathbb{P}(X > 0,1) = 0,90$; $\mathbb{P}(X > 1) = 0,37$; $\mathbb{P}(X > 10) = 0,000045$.

Exemple 3 (Loi de Pareto). Soit $\alpha > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \to [0,1]$, telle que $f(x) = \alpha x^{-\alpha-1}$ si $x \geq 1$ et $f(x) = 0$ si $x < 1$. Alors f est une fonction de densité. C'est la densité de la loi de Pareto de paramètre α. Une variable de loi de Pareto ne prend que des valeurs positives.

Soit X une variable de loi de Pareto de paramètre α et soit $x > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(X > x) = \int_x^{\infty} \alpha x^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}t = x^{-\alpha}\ .$$

Par exemple, pour $\alpha = 1$, $\mathbb{P}(X > 1,1) = 0,91$; $\mathbb{P}(X > 2) = 0,5$; $\mathbb{P}(X > 10) = 0,1$, $\mathbb{P}(X > 100) = 0,01$.

En comparant avec l'exemple précédent, on remarque qu'une variable de loi de Pareto de paramètre 1 prend des grandes valeurs (par exemple > 10) avec une probabilité beaucoup plus grande qu'une variable de loi exponentielle.

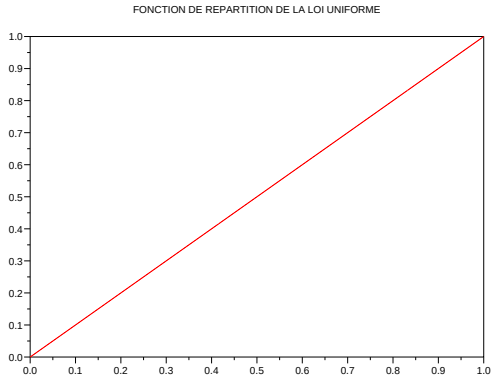
Exemple 4 (Loi normale centrée réduite). Soit $f : \mathbb{R} \to [0,1]$, telle que $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Alors f est une fonction de densité. C'est la densité de la loi dite gaussienne ou normale centrée réduite, qui peut prendre toute valeur réelle.

Définition 2 (Fonction de répartition)**.** *Soit X une variable aléatoire réelle (quelconque). Sa fonction de répartition est la fonction F définie par :*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}(X \leq x) \ . \end{aligned}$$

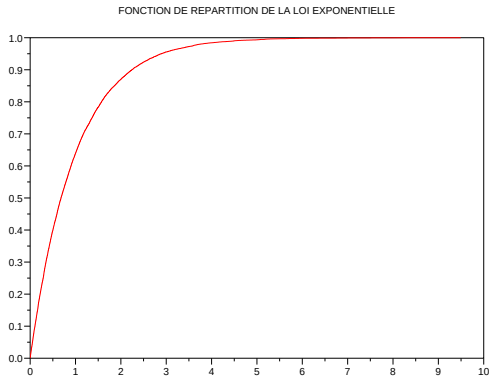
Exemple 5 (Loi uniforme sur $[0,1]$). Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Sa fonction de répartition est la fonction

$$F(x) = x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{\{x>1\}} \ .$$



Exemple 6 (Loi exponentielle). Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle. Sa fonction de répartition est

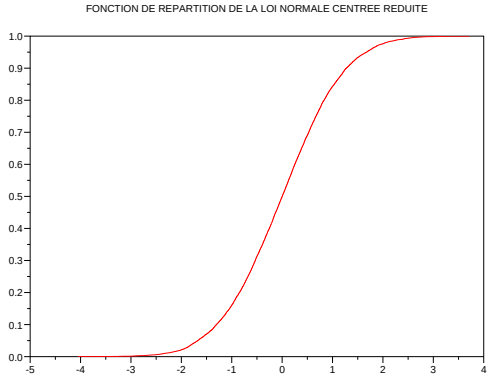
$$F(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x})\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}} \ .$$



Exemple 7 (Loi normale centrée réduite). Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle. Sa fonction de répartition est

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}t \ .$$

Il n'est pas possible d'exprimer F à l'aide des fonctions usuelles. Les valeurs de $F(x)$ pour des valeurs de x sont données dans les tables statistiques et par les logiciels de statistique.



Proposition 2. *La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est une fonction croissante continue à droite et caractérise la loi de X. La loi de X admet une densité si et seulement si sa fonction de répartition est dérivable par morceaux.*

6.1 Transformation d'une loi à densité

La détermination de la loi d'une fonction d'une variable aléatoire à densité est un problème plus complexe que dans le cas discret. En particulier, une fonction d'une variable aléatoire à densité n'est pas nécessairement une nouvelle variable aléatoire admettant une densité.

Exemple 8. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle. Soit $a > 0$ un réel, et soit T la variable discrète définie par $T = [aX] + 1$, où $[x]$ est la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier k tel que $k \leq x < k + 1$. Déterminons la loi de T. Les valeurs que peut prendre T sont les entiers non nuls. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a, par définition de la loi exponentielle,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = k) &= \mathbb{P}(aX \in [k-1, k[) = \mathbb{P}(X \in [(k-1)/a, k/a[) \\ &= \int_{(k-1)/a}^{k/a} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{(k-1)/a} - \mathrm{e}^{k/a} \ .\end{aligned}$$

Posons $p = \mathrm{e}^{-1/a}$. Alors $p \in]0, 1[$ et

$$\mathbb{P}(T = k) = p(1-p)^{k-1} \ .$$

La loi de T est donc la loi géométrique de paramètre p.

Dans ce cas particulier, la fonction n'était pas bijective. Si la transformation $Y = \phi(X)$ de la variable à densité X est une bijection monotone sur l'intervalle où X prend ses valeurs, alors Y admet une densité.

Proposition 3. *Soit I un intervalle et $X : \Omega \to I$ une variable aléatoire admettant une densité, (qui est nécessairement nulle hors de I). Soit $\phi : I \to J$ une bijection strictement monotone et dérivable de I sur J. Alors ϕ admet une réciproque ψ dérivable de J sur I et la variable $Y = \phi(X)$ admet une densité g donnée par*

$$g(y) = \begin{cases} |\psi'(y)| f \circ \psi(y) = f \circ \psi(y) / |\phi'(\psi(y))| & \text{si } y \in J \ , \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

Démonstration. La preuve repose sur la formule du changement de variable dans les intégrales. Soit $B \in J$. Puisque ϕ est bijective de réciproque ψ, on a

$$\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(\phi(X) \in B) = \mathbb{P}(X \in \psi(B)) = \int_{\psi(B)} f(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

On effectue maintenant le changement de variable $y = \phi(x)$, soit $x = \psi(y)$.

$$\mathbb{P}(Y \in B) = \int_B f(\psi(y)) \psi'(y) \, \mathrm{d}y \ .$$

La densité devant être positive, on obtient bien la formule (1). On obtient la seconde expression en appliquant la formule de la dérivée de la réciproque : $\psi' = 1/\phi' \circ \phi$. □

Exemple 9. Soit X une variable admettant une densité f. Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors $aX + b$ admet la densité $a^{-1} f((x-b)/a)$.

Si X suit la loi exponentielle, et $a = 1/\lambda$, $\lambda > 0$, alors X/λ admet la densité $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ et 0 sinon. La loi de X/λ est appelée loi exponentielle de paramètre λ.

Si X suit la loi Gaussienne centrée réduite, et $Y = m + \sigma X$, avec $\sigma > 0$, alors Y admet la densité $\mathrm{e}^{-(x-m)^2/2\sigma^2} / \sqrt{2\pi\sigma^2}$. La loi de Y est appelée loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Exemple 10. Soit X une variable de loi exponentielle et $Y = X^2$. La fonction $x \mapsto x^2$ est une bijection dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et donc la loi de Y admet la densité $g(y) = \mathrm{e}^{-\sqrt{y}}/2\sqrt{y}$ si $y > 0$ et 0 sinon.

Exemple 11. Soit U une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$ et soit $X = -\log(U)$. Alors X suit la loi exponentielle. En effet, pour $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\log(U) \geq -x) = \mathbb{P}(U \geq \mathrm{e}^{-x}) = 1 - \mathrm{e}^{-x} .$$

6.2 Espérance pour les variables à densité

Proposition 4. *Soit X une variable aléatoire admettant la densité f sur $\mathbb{R}$ et soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Alors*

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x) \, \mathrm{d}x .$$

Application : variance Soit X une variable aléatoire réelle. On rappelle que sa variance est définie par

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] .$$

Si X admet la densité f, alors :

$$\mathrm{var}(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) \, \mathrm{d}x - \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) \, \mathrm{d}x \right)^2 .$$

Espérance et variance de lois usuelles à densité.

loi de X	$\mathbb{E}[X]$	$\mathrm{var}(X)$
Uniforme sur $[0, 1]$	$1/2$	$1/12$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Pareto $\mathcal{P}(\alpha)$, $\alpha \leq 1$	∞	∞
Pareto $\mathcal{P}(\alpha)$, $1 < \alpha \leq 2$	$\alpha/(\alpha - 1)$	∞
Pareto $\mathcal{P}(\alpha)$, $\alpha > 2$	$\dfrac{\alpha}{(\alpha - 1)}$	$\dfrac{\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	m	σ^2

7 Couples de loi à densité

Comme on l'a déjà vu dans le cas des variables discrètes, pour étudier conjointement deux variables aléatoires, la connaissance de leurs lois marginales en suffit pas. Il faut connaître leur loi jointe, c'est-à-dire la loi du couple (X, Y), soit la donnée de $\mathbb{P}((X, Y) \in A)$ pour toute partie A de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On peut généraliser la notoin de densité pour un couple ou une famille de variables aléatoires. Les calculs font alors intervenir des intégrales multiples.

Définition 3 (Densité jointe)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction positive d'intégrale 1 :*

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1 \ .$$

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. On dit que la loi jointe du couple (X,Y) admet la densité f, si pour toute partie A de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ .$$

Lorsque que l'on connait la loi jointe du couple (X,Y), on peut connaître les lois marginales de X et Y. La réciproque n'est vraie que dans le cas où X et Y sont indépendantes.

Proposition 5. *Soit X et Y deux variables aléatoires réelles dont la loi jointe admet la densité f. Alors la loi de X admet la densité f_X et Y admet la densité f_Y respectivement définies par*

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \ ,$$
$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \ .$$

Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si la densité jointe est le produit des densités marginales, i.e.

$$\forall x,y, \quad f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \ .$$

On fera bien attention à intégrer la bonne variable lorsque l'on appliquera les formules précédentes.

Exercice 7.1. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la loi admet la densité

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{e}^{-y}/y \ , & \text{si} \quad 0 < x,y < \infty \ , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(i) X et Y sont-elles indépendantes ?

(ii) Déterminer la loi marginale de Y.

(iii) Calculer $\mathbb{P}(X > 1 \mid Y > 1)$.

Corrigé. (i) La densité jointe n'a pas une forme produit, donc les variables ne sont pas indépendantes.

(ii) La loi marginale de Y admet la densité f_Y définie par

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{e}^{-y}/y\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-y}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x/y}\,\mathrm{d}x/y = \mathrm{e}^{-y}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-y} \ ,$$

où l'on a effectué le changement de variable $t = x/y$ pour passer de l'avant-dernière à la dernière intégrale. La loi de Y est donc la loi exponentielle.

(iii) Par définition, $\mathbb{P}(X > 1 \mid Y > 1) = \mathbb{P}(X > 1 \text{ et } Y > 1)/\mathbb{P}(Y > 1)$. Puisqu'on vient de voir que la loi de Y est la loi exponentielle, on a donc $\mathbb{P}(Y > 1) = \mathrm{e}^{-1}$ (cf. Exemple). Pour calculer $\mathbb{P}(X > 1 \text{ et } Y > 1)$, on utilise la densité jointe, qu'on intègre tout d'abord par rapport à x.

$$\mathbb{P}(X > 1 \text{ et } Y > 1) = \int_1^\infty \int_1^\infty \mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{e}^{-y}/y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-2y} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} \,.$$

Finalement on a $\mathbb{P}(X > 1 \mid Y > 1) = 1/(2\mathrm{e})$.

□

Exemple 12. Soient X et Y deux variables aléatoires admettant la densité jointe $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x-y}$. Cette densité est de la forme produit, donc X et Y sont indépendantes, de même loi marginale exponentielle. Posons $Z = \min(X, Y)$ et déterminons la loi de Z. Tout d'abord, Z est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ puisque le plus petit de deux nombres positifs est positifs. Pour déterminer la loi de Z, on peut essayer de déterminer sa fonction de répartition $z \mapsto \mathbb{P}(Z \leq z)$ qui la caractérise. On va plutôt calculer $\mathbb{P}(Z > z)$, pour utiliser la remarque suivante : le minimum de deux nombres est plus grand qu'un troisième si les deux le sont.

$$\mathbb{P}(Z > z) = \mathbb{P}(\min(X, Y) > z) = \mathbb{P}(X > z \text{ et } Y > z) \,.$$

On utilise enfin l'hypothèse essentielle : X et Y sont indépendantes.

$$\mathbb{P}(Z > z) = \mathbb{P}(X > z \text{ et } Y > z) = \mathbb{P}(X > z)\mathbb{P}(Y > z) = \mathrm{e}^{-2z}.$$

La loi de Z est donc la loi exponentielle de paramètre 2.

7.1 Espérance d'une fonction d'un couple de variable admettant une densité

Proposition 6. *Soient X et Y deux variables aléatoires admettant la densité jointe f et soit ϕ une fonction. Alors*

$$\mathbb{E}[\phi(X, Y)] = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \phi(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,. \tag{2}$$

Application : covariance En appliquant la formule précédente, on obtient, pour un couple (X, Y) dont la loi jointe admet la densité f, et de lois marginales f_X et f_Y,

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} xy\{f(x, y) - f_X(x)f_Y(y)\} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,.$$

Corrigé de l'exercice 7.1 (iv). On sait déjà que Y suit la loi exponentielle. Donc $\mathbb{E}[Y] = \mathrm{var}(Y) = 1$. Pour calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X^2]$, on applique la formule (2) aux fonctions $(x, y) \mapsto$

x et $(x,y) \mapsto x^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{e}^{-y}/y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty y\mathrm{e}^{-y} \int_0^\infty x/y\mathrm{e}^{-x/y}\,\mathrm{d}x/y\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \int_0^\infty t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1\ ; \\
\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{e}^{-y}/y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-y} \int_0^\infty (x/y)^2\mathrm{e}^{-x/y}\,\mathrm{d}x/y\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\times 2 = 4\ .
\end{aligned}$$

On rappelle que pour tout entier k, $\int_0^\infty t^k\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = t!$. On montrerait de même que pour tout k, $\mathbb{E}[X^k] = (k!)^2$. On a donc $\mathrm{var}(X) = 3$. Enfin,

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X,Y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty xy\mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{e}^{-y}/y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-y} \int_0^\infty x/y\mathrm{e}^{-x/y}\,\mathrm{d}x/y\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \int_0^\infty t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\times 1 = 2\ .
\end{aligned}$$

On obtient donc $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 2 - 1 = 1$. $\square$