Corrigé de l'examen de septembre 2006
Exercice 1

1) $L_\theta(x_1,...,x_n) = (1-\frac{1}{\theta})^{\sum_{i=1}^n x_i \; -n} \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\; x_i>1}$

   L_θ est dérivable par rapport à θ.

   Si tous les $x_i > 1$, on peut écrire

   $ln(L_\theta(x_1,...,x_n)) = (\sum_{i=1}^n x_i - \; n)(ln(1-\frac{1}{\theta})) - n\; ln(\theta).$

   $\frac{\delta ln(L_\theta)}{\delta\theta} = \frac{1}{\theta^2}\frac{\sum_{i=1}^n x_i \; - \; n}{1-\frac{1}{\theta}} \; - \frac{n}{\theta}.$

   Cherchons $\hat{\theta}_n$ tel que $\frac{\delta ln(L_\theta)}{\delta\theta} = \frac{1}{\hat{\theta}_n^2}\frac{\sum_{i=1}^n x_i \; - \; n}{1-\frac{1}{\hat{\theta}_n}} \; - \frac{n}{\hat{\theta}_n} \; = \; 0.$

   D'où $\hat{\theta}_n = \bar{x}_n$ est un extremum. Vérifions que c'est un maximum.

   $\frac{\delta^2 ln(L_\theta)}{\delta^2\theta} = (\sum_{i=1}^n x_i \; - \; n)\frac{1-2\theta}{(\theta^2-\theta)^2} + \frac{n}{\theta^2}$ qui prend comme valeur en $\hat{\theta}_n$:

   $-\frac{n\;\hat{\theta}_n}{\hat{\theta}_n^2(\hat{\theta}_n-1)} < 0$

   On a donc montré que $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ est l'emv de θ.

2) $E(\hat{\theta}_n) = E(X) = \theta$ donc $\hat{\theta}_n$ est un esb de θ.

3) Comme $\hat{\theta}_n$ est un esb de θ, le risque quadratique est donné par $R_\theta = Var(\hat{\theta}_n) = Var(X)/n = \frac{\theta^2-\theta}{n}$ qui converge vers 0 quand n tend vers l'infini, donc $\hat{\theta}_n$ est un estimateur convergent de θ.

4) $I_n(\theta) = -E(\frac{\delta^2 ln(L_\theta(X_1,...,X_n)}{\delta^2\theta}) = \frac{n}{\theta^2-\theta} = \frac{1}{Var(\hat{\theta}_n)}$ donc $\hat{\theta}_n$ est un estimateur efficace de θ.

5) On peut appliquer le théorème central limite à l'échantillon $(X_1,...,X_n)$. Alors $Z = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{var(\bar{X}_n)}} = \sqrt{n}\;\frac{\hat{\theta}_n \; - \theta}{\sqrt{\theta(\theta-1)}}$ suit approximativement une loi $N(0,1)$.

6) Pour construire l'intervalle de confiance pour θ, on utilise un bon estimateur de θ. Soit donc $\hat{\theta}_n$ un estimateur convergent de θ. Cherchons maintenant une fonction pivotale fonction de $\hat{\theta}_n$. Soit $Z = \sqrt{n}\;\frac{\hat{\theta}_n \; - \theta}{\sqrt{\theta(\theta-1)}}$ qui suit approximativement une loi

$N(0,1)$ d'après la question précedente, Comme $n > 30$.

Posons $0.95 = P(-1.96 < Z < 1.96)$.

D'où $\bar{x}_n - 1.96\sqrt{\dfrac{\theta^2-\theta}{n}} \ < \ \theta \ < \ \bar{x}_n - 1.96\sqrt{\dfrac{\theta^2-\theta}{n}}$ et on remplace θ dans les bornes de l'intervalle par $\bar{x}_n$ et on obtient:

$$\bar{x}_n - 1.96\sqrt{\frac{\bar{x}_n^2-\bar{x}_n}{n}} \ < \ \theta \ < \ \bar{x}_n - 1.96\sqrt{\frac{\bar{x}_n^2-\bar{x}_n}{n}}$$

D'où:

$$12.1597 \ < \theta \ < \ 17.8403$$

Exercice 2
On veut tester les hypothèses suivantes, pour un niveau 1%:

$$\begin{array}{rl} & H_0: \ m \ = \ 50 \\ \text{contre} & H_1: m \ < \ 50 \end{array}$$

1) Sous H_0, la v.a $Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}$ suit une loi $N(0,1)$.
   La région de rejet est donnée par $W = (\bar{X}_n < K)$.
   D'où, $K \ = \ 50 - 2,326\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 42,6445$
   Comme $\bar{x}_n \ = \ 48 > 42,6445$ n'est pas dans la région de rejet, on ne rejette pas au niveau 1% l'hypothèse H_0.
2) Sous H_0, la v.a $Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m}{\hat{S}_n}$ suit une loi de Student $St(9)$.

   La région de rejet est donnée par $W = (\bar{X}_n < K)$.
   D'où, $K \ = \ 50 - 2,821\frac{\hat{s}_n}{\sqrt{n}} = 40.5966$ avec $\hat{s}_n = 10\sqrt{\frac{10}{9}} = 10,541$.
   Comme $\bar{x}_n \ = \ 48 > 40.5966$ n'est pas dans la région de rejet, on ne rejette pas au niveau 1% l'hypothèse H_0.
3) Sous H_0, la v.a $Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m}{\hat{S}_n}$ suit une loi de Student $St(199)$.

   La région de rejet est donnée par $W = (\bar{X}_n < K)$.
   D'où, $K \ = \ 50 - 2,326\frac{\hat{s}_n}{\sqrt{n}} = 48.347$ avec $\hat{s}_n = 10\sqrt{\frac{200}{199}} = 10,025$.
   Comme $\bar{x}_n \ = \ 48 \ < \ 48.347$ est dans la région de rejet, on rejette au niveau 1% l'hypothèse H_0.

Exercice 3

1) On veut tester au niveau 1%:

H_0 : l'opinion vis à vis de la réforme ne diffère pas suivant le type d'emploi *contre*

H_1 : l'opinion vis à vis de la réforme diffère suivant le type d'emploi

On construit le tableau des effectifs théoriques sous H_0:

	ouvriers	cadres moyens	cadres supérieurs
favorable	$188,1$	$49,5$	$26,4$
opposé	$96,9$	$25,5$	$13,6$

Sous H_0, comme n_1 et $n_2 \geq 30$ et que les effectifs théoriques sont supérieurs à 5.

$T_n = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \frac{(N_{ij} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{n})^2}{\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}}$suit approximativement une loi $\chi^2(2)$.

La région de rejet, au niveau 1% de la forme

$$W = (T_n \geq 9,21)$$

On calcule la valeur de T_n sur l'échantillon et on obtient $t_n = 2,623$. Comme $t_n < 9,21$ n'est pas dans la région de rejet, on rejette au niveau 1% l'hypothèse que dans l'entreprise l'opinion vis à vis de la réforme diffère suivant le type d'emploi.

2) Soit $n = 115$ le nombre de cadres, notons p la probabilité qu'un individu soit favorable à la réforme. On veut tester au niveau 1%: $H_0 :\ p = 0,5$ contre $H_1 :\ p > 0.5$.

Sous H_O, la v.a $Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - 0,5}{\sqrt{0,5\ 0,5}}$ suit une loi $N(0,1)$.

La région de rejet est donnée par $W = (\bar{X}_n > K)$

$$0,01 \ = \ P_{H_0}(\bar{X}_n > K)$$

D'où, $K \ = \ 0,5 + 2,33\sqrt{\frac{0,5\ 0,5}{n}} = 0,6$.

On calcule la valeur de $\bar{X}_n$ sur l'échantillon et on obtient $x_n = 0,7$. Comme $\bar{x}_n > 0,6$ est dans la région de rejet, on ne rejette pas au niveau 1% l'hypothèse que chez les cadres (moyens ou supérieurs) de l'entreprise, un majorité est favorable à la réforme proposée .