Corrigé de l'examen de septembre 2007
Exercice 1

1) $L_a(x_1,...,x_n) = \dfrac{1}{a^n}\ exp\left(-\dfrac{\sum_{i=1}^n x_i\ -\ nb}{a}\right)\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\ x_i\in[b,+\infty[}$

2) L_a est dérivable par rapport à a.
Si tous les $x_i \in [b,+\infty[$, on peut écrire

$ln(L_a(x_1,...,x_n)) = -nln(a)\ -\dfrac{\sum_{i=1}^n x_i\ -\ nb}{a}.$
$\dfrac{\partial ln(L_a)}{\partial a} = -\dfrac{n}{a}\ + \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i\ -\ nb}{a^2}.$
Cherchons $\hat{a}$ tel que $-\dfrac{n}{\hat{a}}\ + \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i\ -\ nb}{\hat{a}^2} = 0.$

On trouve $\hat{a} = \bar{x}_n - b$ comme point stationnaire. Vérifions que $L_a(\hat{a})$est la valeur maximale.

$\dfrac{\partial^2 ln(L_a)}{\partial^2 a} = \dfrac{n}{a^2}\ - 2\dfrac{\sum_{i=1}^n x_i\ - nb}{a^3}$ qui prend comme valeur en $\hat{a}$: $-\frac{n}{\hat{a}^2}\ \ < 0.$

On a donc montré que $\hat{a} = \hat{X}_n - b$ est l'emv de a.

3) $E(\hat{a}) = E(X) - b = a + b - b = a$
donc $\hat{a}$ est un esb de a.

4) Comme $\hat{a}$ est un esb de a, le risque quadratique est donné par $R_a = Var(\hat{a}) = Var(X)/n = a^2/n$ qui converge vers 0 quand n tend vers l'infini,
donc $\hat{a}$ est un estimateur convergent de a.

5) L'information de Fisher est donnée par $I_n(a) = -E(\dfrac{\partial^2 ln(L_a(X_1,...,X_n)}{\partial^2 a}) =$
$-\dfrac{n}{a^2}\ + 2\dfrac{\sum_{i=1}^n E(X_i)\ - nb}{a^3} = -\dfrac{n}{a^2}\ + 2\dfrac{na + nb\ - nb}{a^3} = \dfrac{n}{a^2} = \dfrac{1}{Var(\hat{a})}$
donc $\hat{a}$ est un estimateur efficace de a.

Exercice 2
1) Test sur l'espérance d'une loi normale $N(m,\sigma^2)$, σ inconnu.

On veut tester les hypothèses suivantes, pour un niveau $\alpha = 5\%$:

$$H_0:\ m\ =\ 2$$
$$\text{contre}$$
$$H_1:\ m\ >\ 2$$

Sous H_O, la v.a $Z = \sqrt{9}\frac{\bar{X}_n - 2}{\hat{S}_n}$ suit une loi de Student $St(8)$.

La région de rejet est donnée par $W = (\bar{X}_n > K)$
Soit $0,05 \;=\; P_{H_0}(\bar{X}_n > K)$
D'où, $K \;=\; 2 + u_{0,95}\frac{\hat{s}_n}{\sqrt{9}}$ avec $u_{0,95} = 1,86$ et $\hat{s}_n^2 = 0.8327$.

La région de rejet du test est donc:

$$W \;=\; (\; \bar{X}_n > 2.5163)$$

Comme $\bar{x}_n = 2.234 < 2.5163$, on ne rejette pas H_0 et on peut affirmer que la fabrication est conforme.

2) La puissance est donnée par $\eta \;=\; P_{H_1}(\bar{X}_n > 2.5163) \;=\; P_{H_1}\left(Z > \sqrt{9}\;\frac{2.5163 - 3}{\hat{S}_n}\right) \;=$ $P_{H_1}\left(Z > -1.59\right) \;=\; 0.925$.

3) L'intervalle de confiance pour la variance σ^2 est:

$$P\left(\frac{(n-1)\hat{S}_n^2}{u_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\hat{S}_n^2}{u_1}\right) \;=\; 0.95$$

avec $u_1 \;=\; 2.18$ quantile d'ordre $0,025$ et $u_2 \;=\; 17.535$ quantile d'ordre $0,975$ lus dans la table $\chi^2(8)$.
On obtient finalement une fourchette d'estimation pour σ^2, à partir de l'échantillon des observations $(x_1, x_2, ..., x_9)$:

$$0,38 \leq \sigma^2 \leq 3.0558.$$

Exercice 3

On peut représenter les données dans un tableau de contingence:

X/Y	grippé	non grippé
vacciné	50	150
non vacciné	32	68

On veut tester au niveau :

$$H_0 : \text{les variables X et Y sont indépendantes}$$
$$\text{contre}$$
$$H_1 : \text{les variables X et Y ne sont pas indépendantes}$$

On construit le tableau des effectifs théoriques sous H_0:

X/Y	grippé	non grippé
vacciné	54.67	145.33
non vacciné	27.33	72.67

Sous H_0, comme $300 \geq 30$ et que les effectifs théoriques sont supérieurs ou égaux à 5, $T_n = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{(N_{ij} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{n})^2}{\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}}$ suit approximativement une loi $\chi^2(1)$.

La région de rejet, au niveau $\alpha = 5\%$ est de la forme

$$W = (T_n \geq 3.841)$$

On calcule la valeur de T_n sur l'échantillon et on obtient $t_n = 1.64$. Comme $t_n < 3.841$ n'est pas dans la région de rejet, on ne rejette pas au niveau 0.05 l'hypothèse d'indépendance entre X et Y. On rejette donc l'efficacité du vaccin .

Exercice 4

1) $E(\hat{\alpha_1}) = E(X) = \alpha$ et $V(\hat{\alpha_1}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$
donc $\hat{\alpha_1}$ est un estimateur convergent de α.
$E(\hat{\alpha_2}) = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = \alpha(1-\alpha) + \alpha^2 = \alpha$ et $V(\hat{\alpha_2}) = \frac{V(X^2)}{n} = \frac{2\alpha^2(1-\alpha^2)}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$
donc $\hat{\alpha_1}$ est un estimateur convergent de α.

2) Comme $(X_1, ..., X_n)$ est un échantillon de loi normale de moyenne α et de variance $\alpha(1-\alpha)$, alors $Z = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} = \sqrt{n}\ \frac{\hat{\alpha_1} - \alpha}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}$ suit une loi $N(0,1)$.

On peut appliquer le théorème central limite à l'échantillon $(X_1^2, ..., X_n^2)$.

Alors $Z = \dfrac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - E(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2)}{\sqrt{V(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2)}} = \sqrt{n}\ \dfrac{\hat{\alpha_2} - \alpha}{\sqrt{2\alpha^2(1-\alpha^2)}}$ suit approximativement une loi $N(0,1)$.