3 Probabilités conditionnelles

Exercice 3.1

Les résultats possibles de cette expérience aléatoire sont les couples ordonnés suivants :

$$\Omega = \{(i,j), 1 \leq i,j \leq 6\},$$

de cardinal $card(\Omega) = 36$. L'événement A "au moins l'un d'entre eux montre 6" correspond aux couples non ordonnés suivants (on ne considère que les couples (i,j) tels que $i \leq j$) :

$$\{1,6\}, \{2,6\}, \{3,6\}, \{4,6\}, \{5,6\}, \{6,6\}.$$

Par conséquent, le cardinal associé à cet événement est $card(A) = 2+2+2+2+2+1 = 11$. Il suit que $P(A) = 11/36$.
L'événement B désigne "les deux résultats sont différents" correspond aux couples non ordonnés suivants :

$$\{i,j\}, 1 \leq i < j \leq 6.$$

Par conséquent, le cardinal associé à cet événement est $card(B) = 6 \times 5 = 30$. Il suit que $P(B) = 30/36$. De plus, nous avons d'après ce qui précède $card(A \cap B) = 10$ et $P(A \cap B) = 10/36$.
Donc $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{3}$.

La correction de l'exercice 3.1 doit vous guider pour faire les exercices 3.2 et 3.4.

Exercice 3.3

Notons E l'événement "la deuxième carte est noire" et F l'événement "la première carte est noire". En utilisant la formule des probabilités totales, nous avons :

$$P(E) = P(E/F) \times P(F) + P(E/F^c) \times P(F^c) = 25/51 \times 1/2 + 26/51 \times 1/2 = 1/2.$$

La correction de l'exercice 3.3 doit vous guider pour faire l'exercice 3.5.

Exercice 3.6

Soit M l'événement "l'individu est porteur du virus", S l'événement "l'individu est non porteur du virus" et $p = P(M)$. On note $+$ l'événement "le test est positif" et - l'événement "le test est négatif".
On note $P(+/M) = r$ et $P(+/S) = s$.

(i) D'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(+) = P(+/M)P(M) + P(+/S)P(S) = rp + s(1-p)$.

(ii) La formule de Bayes donne :

$$P(M/+) = \frac{P(+/M)P(M)}{P(+)} = \frac{rp}{rp + s(1-p)}.$$

(iii) (a) $r = 0.99, s = 0.001, p = 0.001$ donc $P(M/+) = 0.498$.
(b) $r = 0.99, s = 0.001, p = 0.3$ donc $P(M/+) = 0.998$.

(iv) Le test est bon dans le cas b) car $P(M/+)$ est proche de 1 et plus grand que 0.5.

La correction de l'exercice 3.6 doit vous guider pour faire les exercices 3.7 et 3.9.

Exercice 3.8

Notons X le génotype de la mère, Y celui du père et Z celui de l'enfant. On appelle D_X l'allèle donné par la mère et D_Y celui donné par le père. Comme $\{aa, AA, Aa\}$ est l'ensemble des génotypes possibles d'un des parents, nous avons $u + 2v + w = 1$.

1. Nous utilisons à chaque fois le fait que D_X et D_Y sont indépendants et le fait que chaque parent donne un de ses deux allèles de façon aléatoire.
$P(Z = AA/X = AA, Y = AA) = P(D_X = A/X = AA) \times P(D_Y = A/Y = AA) = 1$
$P(Z = AA/X = AA, Y = Aa) = P(D_X = A/X = AA) \times P(D_Y = A/Y = Aa) = 1 \times 1/2 = 1/2$
$P(Z = AA/X = AA, Y = aa) = P(D_X = A/X = AA) \times P(D_Y = A/Y = aa) = 1 \times 0 = 0$
$P(Z = AA/X = Aa, Y = AA) = P(D_X = A/X = Aa) \times P(D_Y = A/Y = AA) = 1/2 \times 1 = 1/2$
$P(Z = AA/X = Aa, Y = Aa) = P(D_X = A/X = Aa) \times P(D_Y = A/Y = Aa) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$
$P(Z = AA/X = Aa, Y = aa) = P(D_X = A/X = Aa) \times P(D_Y = A/Y = aa) = 1/2 \times 0 = 0$
$P(Z = AA/X = aa, Y = AA) = P(D_X = A/X = aa) \times P(D_Y = A/Y = AA) = 0 \times 1 = 0$
$P(Z = AA/X = aa, Y = Aa) = P(D_X = A/X = aa) \times P(D_Y = A/Y = Aa) = 0 \times 1/2 = 0$
$P(Z = AA/X = aa, Y = aa) = P(D_X = A/X = aa) \times P(D_Y = A/Y = aa) = 0 \times 0 = 0$

2. Les neuf événements par rapport auxquels nous avons conditionné au (1.) forment une partition du génotype possible de l'enfant. A l'aide de la formule des probabilités totales et des valeurs obtenues précédemment, on a :

$$p = 1 \times P(X = AA, Y = AA) + \frac{1}{2} \times P(X = AA, Y = Aa) + \frac{1}{2} \times P(X = Aa, Y = AA) + \frac{1}{4} \times P(X = Aa, Y = Aa)$$

D'autre part,
$P(X = AA, Y = AA) = P(X = AA)P(Y = AA) = u^2$,
$P(X = AA, Y = Aa) = P(X = Aa, Y = AA) = P(X = AA)P(Y = Aa) = 2uv$,
$P(X = Aa, Y = Aa) = (2v)^2 = 4v^2$.
D'où $P(Z = AA) = u^2 + 2uv + v^2$.

3. En conditionnant l'événement $\{Z = AA/X = Aa\}$ par les génotypes possibles du père, à savoir $\{Y = AA, Y = Aa, Y = aa\}$, nous obtenons
$r = P(Z = AA/X = Aa) = \dfrac{1}{2} \times P(Y = AA) + \dfrac{1}{4} \times P(Y = Aa) = \dfrac{u + v}{2}$.

4. Nous recherchons $P(X = Aa/Z = AA) = \dfrac{P(Z = AA/X = Aa)P(X = Aa)}{P(Z = AA)}$ d'après la formule de Bayes.
D'une part, $P(Z = AA/X = Aa)P(X = Aa) = 2rv = (u + v)v$.
D'autre part, $P(Z = AA) = (u + v)^2$.
Par conséquent, nous avons $P(X = Aa/Z = AA) = \dfrac{(u + v)v}{(u + v)^2} = \dfrac{v}{u + v}$.

La correction de l'exercice 3.10 est donnée dans le résumé de cours.