Université de Paris Ouest-Nanterre — Année 2011-2012
Licence Economie et Gestion — première année
Mathématiques renforcées — Examen du 24 janvier 2012

Exercice 1. (i) Soit l'équation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Donner (sans justification) la forme générale des suites solutions de cette équation et déterminer la solution telle que $u_0 = 2$ et $u_1 = 0$.

(ii) Soit l'équation de récurrence $u_{n+1} = \log(1 + u_n)$. Déterminer les limites possibles de cette suite.

Corrigé

(i) Le polynôme caractéristique de l'équation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ est $X^2 - 3X + 2$. Ses racines sont 1 et 2. Les solutions générales de l'équation sont donc de la forme $u_n = a + b \times 2^n$. On identifie les constantes a et b avec les conditions initiales : $u_0 = 2 = a + b$, $u_1 = 0 = a + 2b$, soit $a = 4$ et $b = -2$, d'où la solution $u_n = 4 - 2^{n+1}$.

(ii) Si une suite convergente u est solution de l'équation $u_{n+1} = \log(1 + u_n)$, sa limite doit être solution de l'équation $x = \log(1 + x)$. L'unique solution de cette équation est 0, donc c'est la seule limite possible.

Exercice 2. (i) Déterminer les parties réelle et imaginaire et le module du nombre complexe

$$u = \left(\frac{3 + \mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}\right)^2 \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} .$$

(ii) Déterminer en fonction de $\theta \in (0, \pi/2)$ le module et l'argument de $z = 2(1 + \mathrm{i})^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$.

Corrigé

(i) On calcule directement $|u| = \frac{10}{5} \times 2 = 4$. De plus

$$u = 2\mathrm{i}\left(\frac{(3 + \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})}{(2 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})}\right)^2 = 2\mathrm{i}\left(\frac{5 + 5\mathrm{i}}{5}\right)^2 = 2\mathrm{i}\,(1 + \mathrm{i})^2 = 4\mathrm{i}^2 = -4 .$$

On obtient donc $\mathrm{Re}(u) = -4$ et $\mathrm{Im}(u) = 0$.

(ii) On a $z = 2(2\mathrm{i})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta + \pi/2)}$. On a donc $|z| = 4$ et $\arg(z) = 2\theta + \pi/2$.

Exercice 3. Soit $a \neq b$ des nombres complexes et P un polynôme. Soit α et β les restes des divisions euclidiennes de P par $X - a$ et par $X - b$, respectivement. Déterminer le reste de la division de P par $(X - a)(X - b)$.

Corrigé On a $P(a) = \alpha$ et $P(b) = \beta$. Soit $R = cX + d$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$. On a alors $\alpha = P(a) = R(a) = ac + d$ et $\beta = P(b) = R(b) = bc + d$, d'où

$$c = \frac{\alpha - \beta}{a - b} , \quad d = \frac{a\beta - \alpha b}{a - b} .$$

Le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ est donc

$$R = \frac{\alpha - \beta}{a - b}X + \frac{a\beta - \alpha b}{a - b} .$$

Exercice 4. – Donner la définition de la convergence d'une suite réelle ou complexe u vers sa limite ℓ.

La suite u converge vers ℓ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists N \ , \ \forall n \geq N \ , \ |u_n - \ell| \leq \epsilon \ .$$

Exercice 5. Soit S_n la suite définie par $S_n = \sum_{k=1}^n k^{-1/2}$.

(i) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 2\sqrt{x}$. Montrer que f' est décroissante et en déduire que pour tout $x > 0$, $f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$. (On pourra admettre cette question).

(ii) En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq k^{-1/2} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.

(iii) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $2(\sqrt{n+1} - 1) \leq S_n \leq 2\sqrt{n}$.

(iv) En déduire que la suite $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

(v) Déduire de la question (iii) que $\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} S_n = 2$.

Corrigé

(i) Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $f''(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ donc f' est décroissante. Par le théorème des accroissements finis, il existe $y \in]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(y) \leq f'(x)$. De même, si $x \geq 1$, il existe $y \in]x-1, x[$ tel que $f(x) - f(x-1) = f'(y) \geq f'(x)$.

(ii) On applique l'inégalité précédente pour $x = k$.

(iii) On ajoute les inégalités obtenues pour $k = 1$ jusqu'à n :

$$2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \sum_{k=1}^{n} k^{-1/2} \leq 2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \ ,$$

ce qui donne $2(\sqrt{n+1} - 1) \leq S_n \leq 2(\sqrt{n} - 0)$.

(iv) La suite S_n est encadrée par deux suites qui tendent vers $+\infty$, donc $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

(v) Si l'on divise les trois membres de l'inégalité obtenue en (iii), on obtient

$$2\frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq 2 \ .$$

Or $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}} = 1$, et l'on conclut par le lemme d'encadrement que $\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} S_n = 2$.

Exercice 1. (i) Soit l'équation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Donner (sans justification) la forme générale des suites solutions de cette équation et n déterminer la solution telle que $u_0 = 2$ et $u_1 = 0$.

(ii) Soit l'équation de récurrence $u_{n+1} = 2 - \sqrt{2 - u_n}$. Déterminer les limites possibles de cette suite.

Corrigé

(i) Le polynôme caractéristique de l'équation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ est $X^2 - X - 2$. Ses racines sont -1 et 2. Les solutions générales de l'équation sont donc de la forme $u_n = a \times (-1)^n + b \times 2^n$. On identifie les constantes a et b avec les conditions initiales : $u_0 = 2 = a + b$, $u_1 = 0 = -a + 2b$, soit $a = 4/3$ et $b = 2/3$, d'où la solution $u_n = \frac{4}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(2)^n$.

(ii) Si une suite convergente u est solution de l'équation $u_{n+1} = 2 - \sqrt{2 - u_n}$, sa limite doit être solution de l'équation $x = 2 - \sqrt{2 - x}$. Les solutions de cette équation sont 1 et 2.

Exercice 2. (i) Déterminer les parties réelle et imaginaire et le module du nombre complexe

$$u = \left(\frac{1 + 2\mathrm{i}}{3 - \mathrm{i}}\right)^2 \times \left(2\mathrm{e}^{5i\pi/3}\right)^3 .$$

(ii) Déterminer en fonction de $\theta \in (0, \pi/2)$ le module et l'argument de $z = (1 - \mathrm{i})^2 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^2$.

Corrigé

(i) On obtient directement $|u| = \frac{5}{10} \times 8 = 4$.

$$u = \frac{(1 + 2\mathrm{i})^2}{(3 - \mathrm{i})^2} \times 2^3\mathrm{e}^{5i\pi} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\frac{-3 + 4\mathrm{i}}{8 - 6\mathrm{i}} = -8\frac{(-3 + 4\mathrm{i})(8 + 6\mathrm{i})}{(8 - 6\mathrm{i})(8 + 6\mathrm{i})} = -8\frac{-48 + 14\mathrm{i}}{100} = \frac{96 - 28\mathrm{i}}{25} .$$

On obtient donc $\mathrm{Re}(u) = 96/25$, $\mathrm{Im}(u) = -28/25$.

(ii) Simplifions l'expression de z.

$$z = (-2\mathrm{i})\,(2\cos(\theta))^2 = -8\mathrm{i}\cos^2(\theta) .$$

On a donc $|z| = 8\cos^2(\theta)$ et $\arg(z) = -\pi/2$.

Exercice 3. Soit P un polynôme. Déterminer en fonction de $P(1)$ et $P'(1)$ le reste de la division euclidienne de de P par $(1 - X)^2$.

Corrigé Soit Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(1 - X)^2$. On a alors $P = Q(1 - X^2) + R$ et $P' = Q'(1 - X)^2 + 2Q(1 - X) + R'$. On a donc $P(1) = R(1)$ et $P'(1) = R'(1)$. Si $R = aX + b$, on obtient donc $a + b = P(1)$ et $a = P'(1)$, soit $a = P'(1)$ et $b = P(1) - P'(1)$.

Exercice 4. – Soit u une suite réelle ou complexe. Enoncer la propriété de Cauchy pour la suite u.

La suite u est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists N \ , \ \forall n \geq N \ , \ |u_n - \ell| \leq \epsilon \ .$$

Exercice 5. Soit u la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

(i) Calculer $u_{n+1} - u_n$.

(ii) Soit $m > n \geq 1$. Utiliser la question précédente pour montrer que $0 \leq u_m - u_n \leq \frac{1}{2n+1}$.

(iii) En déduire que la suite u est de Cauchy.

(iv) En déduire qu'elle est convergente. Soit ℓ sa limite.

(v) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \ell - u_n \leq \frac{1}{2n+1}$.

Corrigé

(i) Soit $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} - \cdots - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \ . \end{aligned}$$

(ii) Soit $m > n \geq 1$. Par la question précédente, on obtient que $u_{k+1} - u_k \geq 0$ pour tout k, et

$$0 \leq u_m - u_n = \sum_{k=n}^{m-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2m} \leq \frac{1}{2n+1} \ .$$

(iii) Soit $\epsilon > 0$. Soit N tel que $\frac{1}{2N+2} \leq \epsilon$. Alors, pour tout $m > n \geq N$, on a

$$0 \leq u_m - u_n \leq \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2N+1} \leq \epsilon \ .$$

Ceci signifie précisément que la suite u est de Cauchy.

(iv) Une suite de Cauchy est convergente, donc la suite u est convergente.

(v) Soit $m > n$. D'après les questions précédentes, on a

$$0 \leq u_m - u_n \leq \frac{1}{2n+1} \ .$$

Si on fixe n et on fait tendre m vers l'infini, alors u_m tend vers ℓ, et on a donc

$$0 \leq \ell - u_n \leq \frac{1}{2n+1} \ .$$

Université de Paris Ouest-Nanterre — Année 2011-2012
Licence Economie et Gestion — première année
Mathématiques renforcées — Examen du 24 janvier 2012

Exercice 1. (i) Soit l'équation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$. Donner (sans justification) la forme générale des suites solutions de cette équation et déterminer la solution telle que $u_0 = 2$ et $u_1 = 0$.

(ii) Soit l'équation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1-u_n^2}{2u_n}$. Déterminer les limites possibles de cette suite.

Corrigé

(i) Le polynôme caractéristique de l'équation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$ est $X^2 - 3X - 4$. Ses racines sont -1 et 4. Les solutions générales de l'équation sont donc de la forme $u_n = a \times (-1)^n + b \times 4^n$. On identifie les constantes a et b avec les conditions initiales : $u_0 = 2 = a + b$, $u_1 = 0 = -a + 4b$, soit $a = 8/5$ et $b = 2/5$, d'où la solution $u_n = \frac{8}{5}(-1)^n + \frac{2}{5}(4)^n$.

(ii) Si une suite convergente u est solution de l'équation $u_{n+1} = \frac{1-u_n^2}{2u_n}$, sa limite doit être solution de l'équation $x = x + \frac{1-x^2}{2x}$, soit $\frac{1-x^2}{2x} = 0$, soit $x = 1$ ou $x = -1$.

Exercice 2. (i) Déterminer les parties réelle et imaginaire et le module du nombre complexe

$$u = \left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2 \times (2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^2 \, .$$

(ii) Déterminer en fonction de $\theta \in (0, \pi/2)$ le module et l'argument de $z = 2(1+\mathrm{i})^2 \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\right)^3$.

Corrigé

(i) On calcule directement $|u| = \frac{4}{2} \times 4 = 8$. De plus, on a

$$u = 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}\frac{-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}} = 4\frac{\mathrm{i}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})}{-\mathrm{i}\times\mathrm{i}} = -4\sqrt{3} - 4\mathrm{i} \, .$$

On obtient donc $\mathrm{Re}(u) = -4\sqrt{3}$ et $\mathrm{Im}(u) = -4$.

(ii) Simplifions l'expression de z.

$$z = 2(2\mathrm{i})(2\mathrm{i}\sin(2\theta))^3 = 32\mathrm{i}^4\sin^3(2\theta) = 32\sin^3(2\theta) \, .$$

On a donc $|z| = 32|\sin^3(2\theta)|$, $\arg(Z) = 0$ si $\sin(2\theta) \geq 0$ et $\arg(z) = \pi$ si $\sin(2\theta) < 0$.

Exercice 3. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $A = X^6 + 1$.

Corrigé Remarquons tout d'abord que l'on a

$$X^6 + 1 = (X^2+1)^3 - 3X^2(X^2+1) = (X^2+1)(X^4 - X^2 + 1) \, ,$$
$$X^4 - X^2 + 1 = (X^2+1)^2 - 3X^2 = (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$$

Les polynômes $X^2 \pm \sqrt{3}X + 1$ sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. On obtient donc la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^6 + 1 = (X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \, .$$

Exercice 4. – Soit u et v deux suites réelles. Donner la définition de l'adjacence de u et v.

(i) u est croissante et v est décroissante ;
(ii) $\forall n$, $u_n \leq v_n$,
(iii) $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Exercice 5. Soit u et v les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ , \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ .$$

(i) Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
(ii) Montrer que u et v convergent vers une même limite ℓ.
(iii) Montrer que pour tout n, $|\ell - u_n| \leq 1/(4n+3)$.
(iv) Soit $\epsilon > 0$. Déterminer N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n - \epsilon \leq \ell \leq u_n + \epsilon$.
(v) Les suites u et v sont-elles de Cauchy ?

Corrigé

(i) On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(-1)^{2n+3}}{4n+7} + \frac{(-1)^{2n+2}}{4n+5} = \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+7} > 0\ , \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{(-1)^{2n+2}}{4n+5} + \frac{(-1)^{2n+1}}{4n+3} = \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+3} < 0\ , \\ v_n - u_n &= -\frac{(-1)^{2n+1}}{4n+3} = \frac{1}{4n+3} > 0\ . \end{aligned}$$

On obtient donc que u est croissante, v est décroissante, pour tout n, on a $u_n \leq v_n$ et par le lemme d'encadrement, $v - u$ tend vers 0.

(ii) Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite ℓ. On le prouve en remarquant que u est croissante et majorée donc convergente, v est décroissante et minorée donc convergente, et puisque $u - v$ tend vers 0, les deux limites sont égales.

(iii) Puique v est décroissante et a pour limite ℓ, on a $v_n \geq \ell$ pour tout n, d'où

$$0 \leq \ell - u_n \leq v_n - u_n = \frac{1}{4n+3}\ .$$

(iv) Soit N tel que $1/(4N+3) \leq \epsilon$. D'après la question précédente, pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - \ell| \leq 1/(4n+3) \leq \epsilon$, soit $u_n - \epsilon \leq \ell \leq u_n + \epsilon$.

(v) Une suite convergente est de Cauchy, donc les suites u et v sont de Cauchy.